Methoden zum Lösen von ODEs

17. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

ODEs erster Ordnung

1.1 Einfache Probleme

Beispiel 1. Abgesehen von $x'(t) = f(t)$, stellt

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha \cdot x(t) & \forall\, t \in [t_0 \infty[\\ x(t_0) = x_0 \ , \end{cases}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und dem Anfangstupel $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ das wohl einfachste skalare Anfangswertproblem dar. Offensichtlich suchen wir eine Funktion $x(t)$, welche bis auf einen konstanten Vorfaktor mit ihrer Ableitung identisch ist. Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist uns intuitiv klar:

$$x(t) = x_0 \cdot \exp\left(\alpha \cdot (t - t_0)\right) \qquad \forall\, t \in [t_0, \infty[\tag{1.1.1}$$

Die Richtigkeit dieser Lösung lässt sich auch sehr leicht mit Hilfe der Methode der **Trennung der Variablen** zeigen. Zu dieser Methode später mehr. (**Bemerkung:** Wie man leicht zeigen kann, ist die Lösung des obigen Anfangswertproblems **eindeutig**.)

Beispiel 2. Der Schritt zum nächst schwierigeren Problem, besteht in der Addition eines konstanten Terms β:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta & \forall\, t \in [t_0 \infty[\\ x(t_0) = x_0 \ , \end{cases}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und dem Anfangstupel $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Das Anfangswertproblem aus Beispiel 1 stellt einen Spezialfall unseres jetzigen Problems, mit $\beta = 0$ dar. Wir machen folgenden Lösungsansatz mit den geeigneten Parametern $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$:

$$x(t) : [t_0, \infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longrightarrow \gamma_1 \cdot \exp\left(\alpha \cdot t\right) + \gamma_2$$

Einsetzen dieses Ansatzes in das Anfangswertproblem liefert nach kurzer Rechnung das folgende lineare Gleichungssystem in γ_1 und γ_2:

$$\begin{cases} -\alpha \cdot \gamma_2 & = \beta \\ \gamma_1 \cdot \exp\left(\alpha \cdot t_0\right) + \gamma_2 & = x_0 \ , \end{cases}$$

wobei wir die obere Gleichung durch explizites Einsetzen des Ansatzes in das Anfangswertproblem erhalten. Die untere Gleichung erhalten wir durch Einsetzen des Anfangswertes t_0 in den Ansatz. Lösen des Gleichungssystem liefert schließlich die folgende eindeutige Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \exp\left(\alpha \cdot (t - t_0)\right) - \frac{\beta}{\alpha} \tag{1.1.2}$$

1.2 Variation der Konstanten

Nun sind die Parameter α und β im Allgemeinen nicht konstant, sondern können von der Variablen t abhängen. Für den Spezialfall $\beta(t) = 0$ gilt das folgende Lemma:

Lemma 1.2.1. *(Lösung homogener skalarer ODE)*
$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $\alpha(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.
Für jedes Tupel $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ existiert genau eine Lösung $x(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t) \cdot x(t) & \forall\, t \in I \\ x(t_0) = x_0 \,. \end{cases}$$

Diese Lösung ist

$$x(t) = x_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, \alpha(s) \right) \,. \tag{1.2.1}$$

Diese Idee lässt sich natürlich auch für den allgemeinen Fall $\beta(t) \neq 0$ verallgemeinern. Es gilt:

Satz 1.2.2. *(Variation der Konstanten für skalare ODE)*
$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $\alpha(t), \beta(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen.
Zu jedem Tupel $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ existiert immer eine Lösung $x(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ der inhomogenen ODE

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t) \cdot x(t) + \beta(t) & \forall\, t \in I \\ x(t_0) = x_0 \,. \end{cases}$$

Diese Lösung ist

$$x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, \alpha(s) \right) \cdot \left\{ x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, \beta(s) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{s} \mathrm{d}r\, \alpha(r) \right) \right\} \,. \tag{1.2.2}$$

(**Bemerkung:** Mit Hilfe der **Ungleichung von Gronwall** lässt sich die **Eindeutigkeit** dieser Lösung zeigen.) Sehen wir uns hierzu ein Rechenbeispiel an.

Beispiel 3: Variation der Konstanten. Gegeben sei die folgende skalare inhomogene ODE:

$$\begin{cases} x'(t) = 2t \cdot x(t) + t^3 \\ x(0) = c \in \mathbb{R} \,. \end{cases}$$

Zuerst berechnen wir die Lösung $x_h(t)$ der homogenen ODE: $x'(t) = 2t \cdot x(t)$. Die Lösung dieser ODE können wir leicht unter Verwendung von Gleichung (1.2.1) bestimmen. Wir erhalten:

$$x_h(t) = x_0 \cdot \exp\left(2 \int \mathrm{d}t\, t \right) = x_0 \cdot \exp\left(t^2 + C_1\right) = k \cdot \exp\left(t^2\right) \,,$$

wobei $k = x_0 / \exp(C_1)$ ist. Nun machen wir den Ansatz, dass der Faktor k eine Funktion von t ist, also $k \to k(t)$. Aus Gleichung (1.2.2) wissen wir nun, dass offensichtlich

$$k(t) = \int \mathrm{d}t\, t^3 \cdot \exp\left(-t^2\right)$$

ist. Mit der Substitution $z := t^2$ bekommen wir dieses einfache Integral sofort in den Griff und erhalten schließlich für die allgemeine Lösung $x(t)$:

$$x(t) = k(t) \cdot \exp\left(t^2\right) = \left\{ -\frac{1}{2}\left(t^2+1\right) \exp\left(-t^2\right) + C_2 \right\} \cdot \exp\left(t^2\right) = -\frac{1}{2}\left(t^2+1\right) + C_2 \cdot \exp\left(t^2\right) \,,$$

wobei $C_2 \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante ist. Ausnutzen der gegebenen Anfangsbedingung liefert letztendlich die spezielle Lösung der ODE:

$$x(t) = -\frac{1}{2}\left(t^2+1\right) + \left(c + \frac{1}{2}\right) \cdot \exp\left(t^2\right)$$

1.3 Separation der Variablen

Die Lösung der homogenen ODE aus Beispiel 3 haben wir mit Hilfe von Gleichung (2.1) bestimmt. Eine alternative Methode wäre die sog. **Separation der Variablen**:

Satz 1.3.1. *(Separation der Variablen)*
$I, J \subset \mathbb{R}$ seien offene Intervalle, ferner sei $(t_0, x_0) \in I \times J$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen mit $g(y) \neq 0 \; \forall \; y \in J$. Weiterhin seien

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longrightarrow \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \; f(s),$$

$$G : J \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad z \longrightarrow \int_{x_0}^{z} \mathrm{d}y \; \frac{1}{g(y)}$$

die Stammfunktionen von $f(t)$ bzw. $1/g(y)$. Für ein Teilintervall $\tilde{I} \subset I$ gelte $t_0 \in \tilde{I}$, $F(\tilde{I}) \subset G(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $x(t) : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ der ODE

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \cdot g(x) \; in \; \tilde{I} \\ x(t_0) = x_0 \; . \end{cases}$$

Diese Lösung erfüllt

$$G(x(t)) = F(t) \; \forall \; t \in \tilde{I}.$$

Wie sich zeigen wird, kann man einen ähnlichen **Separationsansatz** auch auf PDEs (partial differential equations) anwenden. Auch zur Separation der Variablen sehen wir uns ein Beispiel an:

Beispiel 4: Separation der Variablen. Gegeben sei die folgende skalare homogene ODE:

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) \cdot \sin(t) = 0 \\ x(\pi) = \frac{1}{e} \; . \end{cases}$$

Wir erhalten folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} & & x'(t) &= -x(t) \cdot \sin(t) \\ \Leftrightarrow & & \int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -\int \mathrm{d}t \; \sin(t) \\ \Leftrightarrow & & \ln\left(\frac{x(t)}{C_1}\right) &= \cos(t) + C_2 \; . \end{aligned}$$

Auflösen nach $x(t)$ liefert schließlich die allgemeine Lösung der skalaren homogenen ODE:

$$x(t) = k \cdot \exp(\cos(t)) \, ,$$

wobei $k = C_1 \cdot \exp(C_2)$ ist. Die Einarbeitung der gegebenen Anfangsbedingung liefert letztendlich die spezielle Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{e} \cdot \exp(\cos(t)) \, .$$

1.4 Weitere Lösungsmethoden

Nun sehen wir uns einige Methoden der Vereinfachung von ODEs an.

Bemerkung 1: Hilfsfunktion. Gegeben sei eine ODE der folgenden Form:

$$x'(t) = f(\alpha \cdot t + \beta \cdot x(t) + \gamma) \ , \tag{1.3.1}$$

wobei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sind. Im trivialen Fall $\beta = 0$ würde eine einfache Integration das Problem lösen. Im allgemeinen Fall $\beta \neq 0$ hilft uns die Hilfsfunktion $u(t) := \alpha \cdot t + \beta \cdot x(t) + \gamma$. Denn wenn $x(t)$ die ODE löst, ist $u(t)$ ebenfalls differenzierbar und erfüllt die folgende ODE:

$$u'(t) = \alpha + \beta \cdot x'(t) = \alpha + \beta \cdot f(\alpha \cdot t + \beta \cdot x(t) + \gamma) = \alpha + \beta \cdot f(u(t)).$$

Diese ODE lässt sich nun mit der Methode der Separation der Variablen lösen. Hierzu ein kurzes Beispiel:

Beispiel 4: Hilfsfunktion. Wir geben uns die folgende ODE vor:

$$x'(t) = (t + x(t))^2 \ .$$

Mit der Hilfsfunktion $u(t) := t + x(t)$ erhalten wir schließlich:

$$u'(t) = 1 + u^2(t) \ .$$

Trennung der Variablen liefert:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \mathrm{d}t \ .$$

Das Integral auf der rechten Seite ist trivial. Das Integral auf der linken Seite bekommen wir mit einem geschulten Blick auch sofort in den Griff. (Tipp: Die Substitution $u := \tan(s)$ hilft dir weiter.) Wir finden schließlich als Lösung:

$$u(t) = \tan(t + c) \ .$$

Mit der Identifikation $x(t) = u(t) - t$ finden wir schließlich auch die Lösung für unsere ursprüngliche ODE:

$$x(t) = \tan(t + c) - t \ .$$

Bemerkung 2: Eulerhomogene ODEs. Gegeben sei eine ODE der Form

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right) \ . \tag{1.3.2}$$

In diesem Fall liegt es nahe, die Substitution $y(t) := x(t)/t$ einzuführen. Denn für jede Lösung $x(t)$ ist auch $y(t)$ differenzierbar und wir finden

$$f\left(y(t)\right) = x'(t) = \frac{d}{dt}\left(t \cdot y(t)\right) = y(t) + t \cdot y'(t)$$

für $t \neq 0$. Umformung liefert letztendlich

$$y'(t) = \frac{f\left(y(t)\right) - y(t)}{t} \ . \tag{1.3.3}$$

Auch hierzu wollen wir uns ein Beispiel ansehen.

Beispiel 5: Eulerhomogene ODEs. Gegeben sei die folgende eulerhomogene ODE:

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \sqrt{1 - \frac{x^2(t)}{t^2}} \ .$$

Es bietet sich natürlich an, mit $y(t) := x(t)/t$ zu substituieren. Es folgt:

$$x(t) = y(t) \cdot t \Longrightarrow x'(t) = y(t) + y'(t) \cdot t \Leftrightarrow y'(t) = \frac{x'(t) - y(t)}{t} \ .$$

Letztendlich finden wir folgende ODE, die es zu lösen gilt:

$$y'(t) = \frac{\sqrt{1-y^2(t)}}{t} \ .$$

Mit der Methode der Trennung der Variablen erhalten wir die folgenden Integrale:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \ .$$

Das Integral auf der rechten Seite ist ein Standardintegral. Durch Substitution mit einer trigonometrischen Funktion „knacken“ wir auch sehr schnell das Integral auf der linken Seite. Letztendlich finden wir

$$y(t) = \frac{x(t)}{t} = \sin\left(\ln(t) + C\right) \Longrightarrow x(t) = t \cdot \sin\left(\ln(t) + C\right) \ .$$

Kapitel 2

ODEs höherer Ordnung

2.1 ODEs n-ter Ordnung und Systeme von ODEs

Betrachten wir nun ODEs der Ordnung n:

$$f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)\right) = 0 \; . \tag{2.1.1}$$

Mit einem „Standardtrick“ können wir diese ODE nun in ein System aus n ODEs erster Ordnung umwandeln. Wir schreiben hierzu jede Ableitung der Funktion $x(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ als separate Funktion mit:

$$y_{(i)}(t) = x^{(i)}(t) \qquad \text{, für } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \, . \tag{2.1.2}$$

Wobei wir $y_0(t) := x(t)$ setzen. Wir erhalten schließlich ein System aus n ODEs erster Ordnung:

$$\begin{cases} y_0'(t) & = y_1(t) \\ & \vdots \\ y_{n-2}'(t) & = y_{n-1}(t) \\ f\left(t, y_0(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{n-2}(t), y_{n-1}'(t)\right) & = 0 \, . \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Systeme von ODEs haben allgemein die folgende Form:

$$z'(t) = A(t) \cdot z(t) + b(t) \; . \tag{2.1.4}$$

Wir erkennen sofort die Analogie zu den Funktionen aus Abschnitt 1.2. Nun ist allerdings klar, dass die gesuchte Funktion $z(t)$ im n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum zu suchen ist. Weiterhin handelt es sich bei $A(t)$ um eine $(n \times n)$-Matrix und bei $b(t)$ um ein n-dimensionalen Vektor. Die Resultate aus Abschnitt 1.2 können jedoch unter Verwendung der **Matrix-Exponentialfunktion** direkt übertragen werden. Wir wollen uns an dieser Stelle allerdings nicht mit Systemen von ODEs beschäftigen. Die Diskussion über Systeme dient uns lediglich als Motivation bzw. als Begründung für spätere Lösungsmethoden. Aus den Eigenschaften für ODE-Systeme können wir durch den engen Zusammenhang zu ODEs n-ter Ordnung folgende Eigenschaften für eben diese ableiten:

Satz 2.1.1. *(Eigenschaften von ODEs n-ter Ordnung)*
$I \subset \mathbb{R}$ sei Intervall, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_0(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t), \beta(t) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ seien stetige Funktionen. Dann gilt:

(i) Die Menge L_{hom} aller Lösungen $x(t) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ der homogenen linearen ODE n-ter Ordnung:

$$x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_0(t) \cdot x(t) = 0 \qquad \text{in } I$$

bildet einen n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Untervektorraum der n-mal differenzierbaren Funktionen $I \longrightarrow \mathbb{K}$.

(ii) Sei $\zeta(t) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ irgendeine Lösung der inhomogenen linearen ODE n-ter Ordnung:

$$x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_0(t) \cdot x(t) = \beta(t) \qquad \text{in } I \; .$$

Dann ist die Menge aller Lösungen der inhomogenen linearen ODE gleich $\zeta(t) + L_{hom}$.

(iii) Die n Funktionen ϕ_n aus L_{hom} sind genau dann linear unabhängig, wenn $\forall\, t \in I$ die sog. Wronski-Determinante

$$W(t) = det \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \dots & \phi_n(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) & \dots & \phi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \phi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

ungleich Null ist.

Im Folgenden wollen wir allerdings Systeme bzw. ODEs n-ter mit konstanten Koeffizienten betrachten, d.h. $A(t) = A = \text{const.}$ und $\alpha_i(t) = \alpha_i = \text{const.}\ \forall\, i$.

2.2 Lineare ODEs mit konstanten Koeffizienten

Für konstante Koeffizienten wird Gleichung (2.1.4) zu

$$z'(t) = A \cdot z(t) + b, \tag{2.2.1}$$

wobei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Skizzieren wir zunächst den Fall $b = 0$. Für den Fall, dass alle einzelnen ODEs des Systems entkoppeln, wissen wir aus vorherigen Abschnitten, dass die ODE $x'(t) = \alpha \cdot x(t)$ von Funktionen der Form $x(t) = \gamma \cdot \exp(\alpha \cdot t)$ gelöst wird. Könnten wir als erreichen, dass unser ODE-System entkoppelt, wären wir direkt in der Lage, Lösungen anzugeben. Die Entkopplung des Systems erreichen wir durch eine Hauptachsentransformation der Koeffizientenmatrix A, so dass A Diagonalgestalt hat (die Eigenwerte von A befinden sich auf der Hauptdiagonalen, sonst stehen überall Nullen in der Matrix). Uns ist klar, dass wir die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix über das charakteristische Polynom erhalten. Doch was nützt uns diese kurze Skizzierung der ODEs ? Am Anfang von Kapitel 2 haben wir gesehen, dass wir ODEs n-ter Ordnung in Systeme umschreiben können und die Systeme somit die gleichen Eigenschaften wie die ODEs höherer Ordnung haben. Damit können wir auch die Resultate über die Hauptachsentransformation übernehmen und erhalten folgende Resultate, um ODEs n-ter Ordnung in den Griff zu bekommen:

Satz 2.2.1. *Das komplexe Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_0$$

besitze n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.
Dann bilden die Funktionen $\phi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \exp(\lambda_k \cdot t)$, mit $k = 1, \ldots, n$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogene linearen ODE

$$x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} \cdot x^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1 \cdot x(t) + \alpha_0 = 0 \qquad \text{in}\, \mathbb{R}\,.$$

Für Vielfachheiten in den Nullstellen des charakteristischen Polynoms erhalten wir das folgende Resultat:

Satz 2.2.2. *Das komplexe Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_0$$

besitze n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit den Vielfachheiten $\nu_1, \ldots \nu_k$, d.h.

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}\,.$$

Für jeden Index $j = 1, \ldots, k$ sind die ν_j Funktionen

$$\phi_{j,l} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto t^l \cdot \exp(\lambda_j \cdot t)\,, \qquad (l = 0, \ldots, \nu_j - 1)$$

Lösungen der homogenen linearen ODE

$$x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} \cdot x^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1 \cdot x(t) + \alpha_0 = 0 \qquad \text{in}\, \mathbb{R}\,.$$

Dabei bilden die n Funktionen $\phi_{j,l}(t)$, mit $j = 1, \ldots, k$ und $l = 0, \ldots, v_j - 1$ ein Lösungsfundamentalsystem.

Sehen wir uns hierzu ein kurzes Beispiel an.

Beispiel 6: homogene ODE 4-ter Ordnung. Gegeben sei die folgende homogene ODE:

$$x^{(4)}(t) + 8x''(t) + 16x(t) = 0 \ .$$

Diese ODE führt uns zu folgendem Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda - 2i)^2 \, (\lambda + 2i)^2 \ .$$

Die jeweils doppelten Nullstellen $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$ des Polynoms liefern schließlich das folgende Lösungsfundamentalsystem:

$$\begin{aligned} \phi_{1,0}(t) &= \exp\left(2i \cdot t\right) \ , \qquad & \phi_{1,1}(t) &= t \cdot \exp\left(2i \cdot t\right) \ , \\ \phi_{2,0}(t) &= \exp\left(-2i \cdot t\right) \ , \qquad & \phi_{2,1}(t) &= t \cdot \exp\left(-2i \cdot t\right) \ . \end{aligned}$$

Unter Verwendung der **Euler'schen Formel** lässt sich auch ein reelles Lösungsfundamentalsystem angeben, was wir aber an dieser Stelle nicht machen wollen. Aus dem Lösungsfundamentalsystem lässt sich nun eine allgemeine Lösung konstruieren.

Bemerkung: Inhomogene lineare ODE n-ter Ordnung. Wir sind nun die ganze Zeit vom homogenen Fall ausgegangen. Was nun aber für ODEs der Form:

$$x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} \cdot x^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1 \cdot x(t) + \alpha_0 = \beta(t) \ ?$$

Für einige Funktionstypen von $\beta(t)$ lässt sich ein Lösungsansatz angeben. Diese Ansätze sind in vielen Fachbüchern und im Internet nachzulesen. Eine weitere Möglichkeit wäre die mehrfache Variation der Konstanten. Diese wollen wir uns in einem Beispiel ansehen:

Beispiel 7: Mehrfache Variation der Konstanten. Gegeben sei die folgende ODE:

$$x''(t) - x(t) = t \cdot \exp(2t) \ .$$

Zunächst bestimmen wir über das charakteristische Polynom die allgemeine Lösung der homogenen ODE. Wir finden:

$$x_h(t) = c_1 \cdot \exp(t) + c_2 \cdot \exp(-t) \ .$$

Für die inhomogene Lösung machen wir den Ansatz, dass die Konstante c_1 eine Funktion von t ist, also $c_1 \longrightarrow c_1(t)$. Dann erhalten wir für $x(t)$ und deren Ableitungen:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1(t) \cdot \exp(t) \ , \\ x'(t) &= c_1'(t) \cdot \exp(t) + c_1(t) \cdot \exp(t) \ , \\ x''(t) &= c_1''(t) \cdot \exp(t) + 2c_1'(t) \cdot \exp(t) + c_1(t) \cdot \exp(t) \ . \end{aligned}$$

Die Funktionen $x(t), x'(t)$ und $x''(t)$ können wir nun in die Ausgangs-ODE einsetzen und erhalten schließlich eine neue ODE für die Funktion $c_1'(t)$:

$$c_1''(t) + 2c_1'(t) = t \cdot \exp(t) \ .$$

Unser Ziel ist es aber $c_1(t)$ zu bestimmen. Also müssen wir nun diese inhomogene ODE lösen. Erneut betrachten wir den homogenen Teil zuerst und finden folgende Lösung:

$$c_1'(t) = k \cdot \exp(-2t) \ .$$

Erneut starten wir mit dem Ansatz, dass k eine Funktion von t ist. Mit der Gleichung für $c_1'(t)$, können wir auch die Gleichung für $c_1''(t)$ bestimmen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= k(t) \cdot \exp(-2t) \ , \\ c_1''(t) &= k'(t) \cdot \exp(-2t) - 2k(t) \cdot \exp(-2t) \ . \end{aligned}$$

Diese beiden Funktionen können wir nun in die ODE für $c_1'(t)$ einsetzen und finden die folgende ODE:

$$k'(t) = t \cdot \exp(3t) \ .$$

Durch einfache Produktintegration finden wir

$$k(t) = \exp(3t) \cdot \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right) \ .$$

Setzen wir dieses Resultat nun in $c_1'(t) = k(t) \cdot \exp(-2t)$ ein und vereinfachen, so erhalten wir

$$c_1'(t) = \exp(t) \cdot \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right) \ .$$

Nun können wir durch einfache Integration einen Ausdruck für $c_1(t)$ berechnen. Wir finden:

$$c_1(t) = \frac{1}{9}\exp(t) \cdot (3t - 4) \ .$$

Wie wir wissen, erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen ODE durch superposition einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen ODE. Somit können wir folgende allgemeine Lösung angeben:

$$x(t) = \frac{1}{9}\exp(2t) \cdot (3t - 4) + c_1 \cdot \exp(t) + c_2 \cdot \exp(-t) \ .$$

Wobei wir die Konstanten c_1 und c_2 nun aus Anfangsbedingungen bestimmen würden. Zum Abschluss des Kapitels betrachten wir nun noch eine inhomogene ODE, welche wir mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes für das inhomogene Termglied lösen.

Beispiel 8: Lösung durch geeigneten Ansatz. Gegeben sei die folgende ODE:

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = t^2 + 2t \ .$$

Erneut beginnen wir, indem wir eine allgemeine Lösung der homogenen ODE bestimmen. Durch kurze Rechnung finden wir mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$x_h(t) = c_1 \cdot \exp(-2t) + c_2 \cdot \exp(-3t) \ .$$

Da die Inhomogenität der ODE durch ein Polynom zweiten Grades hervorgerufen wird, vermuten wir, dass in der partikulären (speziellen) Lösung ein Polynom zweiten Grades auftauchen muss. Also machen wir den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0 \ , \\ x_p'(t) &= 2a_2 \cdot t + a_1 \ , \\ x_p''(t) &= 2a_2 \ . \end{aligned}$$

Diesen Ansatz setzen wir nun in die ursprüngliche ODE ein und erhalten durch Vereinfachen:

$$2a_2 + 5\left(2a_2 t + a_1\right) + 6\left(a_2 t^2 + a_1 t + a_0\right) = t^2 + 2t \ .$$

Nun führen wir einen Koeffizientenvergleich der linken und der rechten Seite der Gleichung durch und erhalten:

$$\begin{aligned} 6a_2 &= 1 & &\Rightarrow a_2 = \frac{1}{6} \ , \\ 10a_2 + 6a_1 &= 2 & &\Rightarrow a_1 = \frac{1}{18} \ , \\ 2a_2 + 5a_1 + 6a_0 &= 0 & &\Rightarrow a_0 = -\frac{11}{108} \ . \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Werte in den Ansatz der Partikulärlösung liefert schließlich die partikuläre Lösung:

$$x_p(t) = \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{18}t - \frac{11}{108} \ .$$

Aus der Superposition von allgemeiner homogener Lösung und partikulärer Lösung finden wir schließlich die allgemeine Lösung der inhomogenen ODE:

$$x(t) = \frac{1}{108}\left(18t^2 + 6t - 11\right) + c_1 \cdot \exp(-2t) + c_2 \cdot \exp(-3t) \ .$$

Kapitel 3

Lösung durch Potenzreihenansatz

Im Großen und Ganzen haben wir gesehen, dass sich die bisherigen ODEs durch geeignete Ansätze mit „Standardfunktionen“ wie der Exponentialfunktion lösen lassen. Häufig begegnen uns allerdings ODEs bei denen ein Ansatz mit einer „Standardfunktion“ aussichtslos ist. Eine solche ODE wäre die **Bessel'sche Differentialgleichung**:

$$z^2 \cdot R''(z) + z \cdot R'(z) + \left(z^2 - \nu^2\right) R(z) = 0 \qquad \text{, wobei } R'(z) := \frac{\mathrm{d}R(z)}{\mathrm{d}z} \; . \tag{3.1.1}$$

Diese ODE hat große Bedeutung in der theoretischen Physik, da sie und ihre Lösungen, die **Bessel-Funktionen** oder auch **Zylinderfunktionen**, in viele Bereichen auftauchen. Betrachtet man die kreisförmige Membran (natürlich in Polarkoordinaten), so findet man die folgende Wellengleichung:

$$\left\{\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right\} u(t,r,\varphi) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(t,r,\varphi) = 0 \qquad \text{, wobei } \partial_r := \frac{\partial}{\partial r} \; .$$

Ein geeigneter **Separationsansatz** liefert neben der ODE für die winkelabhängige Schwingung und der ODE für die zeitabhängige Schwingung folgende Gleichung für die Radialschwingung unserer kreisförmigen Membran:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R(r) + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R(r) + \left(\mu^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R(r) = 0 \; ,$$

wobei μ, ν Separationskonstanten sind. Mit der Substitution $z := \mu \cdot r$, also auch $\mathrm{d}r = \mathrm{d}z/\mu$, finden wir

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}R(z) + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}R(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) R(z) = 0 \; . \tag{3.1.2}$$

Durch Multiplikation mit z^2 können wir Gleichung (3.1.2) als Bessel'sche Differentialgleichung identifizieren. Während Polargleichung und zeitabhängige Gleichung lediglich die **Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators** liefern und die Angabe eines Lösungsfundamentalsystems somit fast schon trivial ist, haben wir hier eine deutlich komplexere ODE, die es zu „knacken“ gilt. Da uns an dieser Stelle nichts Besseres einfällt, versuchen wir einen Potenzreihenansatz um eine Lösungsfunktion zu finden. Bei einem genauen Blick auf Gleichung (3.1.2) erkennen wir, dass sich an der Stelle $z = 0$ eine **schwache Singularität** befindet. Dabei handelt es sich um die einzige Singularität im endlichen Bereich. Für $z = \infty$ finden wir noch eine **wesentliche Singularität**. Für die Entwicklung um eine schwache Singularität garantiert uns die Mathematik (das sog. **Fuchs' Theorem**) eine Lösung der Form

$$R(z) = z^k \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \, z^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \, z^{k+\lambda} \; , \tag{3.1.3}$$

wobei k nicht unbedingt eine natürliche Zahl sein muss und wir $a_0 \neq 0$ definieren. Setzen wir nun den Ansatz für $R(z)$ in Gleichung (3.1.1) ein. Hierfür benötigen wir $R(z), R'(z)$ und $R''(z)$, wir finden:

$$\begin{aligned}
R(z) \quad &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \, z^{k+\lambda} \; , \\
R'(z) \quad &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \, (k+\lambda) \, z^{k+\lambda-1} \; , \\
R''(z) \quad &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda \, (k+\lambda)(k+\lambda-1) \, z^{k+\lambda-2} \; .
\end{aligned}$$

Diese Resultate setzen wir nun in (3.1.1) ein und erhalten schließlich

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda\ (k+\lambda)(k+\lambda-1)\ z^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda\ (k+\lambda)\ z^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda\ z^{k+\lambda+2} - \nu^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda\ z^{k+\lambda} = 0\ . \quad (3.1.4)$$

Der Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen lehrt uns, dass die Koeffizienten aller Potenzen von z für sich selbst verschwinden müssen. Die niedrigste Potenz von z ergibt sich durch Nullsetzen von λ in Gleichung (3.1.4). Die Bedingung, dass der Koeffizient von z^k verschwindet, ist

$$a_0 \left\{k(k-1) + k - \nu^2\right\} = 0\ .$$

Ausnutzen der Definition $a_0 \neq 0$ liefert die sog. **Indexgleichung**, welche eine Bestimmungsgleichung für den Exponenten k ist:

$$k^2 - \nu^2 = 0\ . \quad (3.1.5)$$

Diese hat die Lösungen $k = \pm\nu$. Von weiterem Interesse ist in diesem Fall der Koeffizient des Terms z^{k+1}. Wir erhalten hierfür:

$$a_1 \left\{(k+1-\nu)(k+1+\nu)\right\} = 0\ . \quad (3.1.6)$$

Für $k = \pm\nu$ stellen wir fest, dass weder $(k+1-\nu)$ noch $(k+1+\nu)$ verschwindet und somit $a_1 = 0$ gelten muss (Ausnahme wäre $k = -1/2$). Ferner folgt auch $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$. Betrachten wir zunächst $k = \nu$: Um den Koeffizienten von x^{k+j} zu erhalten, betrachten wir Gleichung (3.1.4) und setzen im ersten, zweiten und vierten Term $\lambda = j$ und im dritten Term $\lambda = j-2$. Damit der Koeffizient von x^{k+j} verschwindet, muss gelten:

$$a_j \left\{(\nu+j)(\nu+j-1) + (\nu+j) - \nu^2\right\} + a_{j-2} = 0\ .$$

Durch Ersetzen von j durch $j+2$ und Umstellen nach $j+2$ finden wir schließlich eine sog. **Rekursionsformel** für a_{j+2}, für $j \geq 0$:

$$a_{j+2} = -a_j \cdot \frac{1}{(j+2)(2\nu+j+2)}\ . \quad (3.1.7)$$

Hieran erkennen wir auch den Grund, warum alle Koeffizienten ungeraden Indices verschwinden. Benutzen wir nun die Rekursionsformel, so erhalten wir die ersten Koeffizienten die folgenden Terme:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \cdot \frac{1}{2\,(2\nu+2)}\ , \\
a_4 &= -a_2 \cdot \frac{1}{4\,(2\nu+4)} = a_0 \cdot \frac{1}{2\,(2\nu+2)} \cdot \frac{1}{4\,(2\nu+4)}\ , \\
a_6 &= -a_4 \cdot \frac{1}{6\,(2\nu+6)} = -a_0 \cdot \frac{1}{2\,(2\nu+2)} \cdot \frac{1}{4\,(2\nu+4)} \cdot \frac{1}{6\,(2\nu+6)}\ , \text{ und so weiter} \quad .
\end{aligned}$$

Nun gilt es aus diesen Ausdrücken eine allgemeine Gesetzmäßigkeit „herauszulesen“, so dass wir auch den Koeffizienten a_{2i}, mit $i \in \mathbb{N}_0$ bestimmen können. Als erstes fällt uns auf, dass wir wohl für ungerade i ein negatives Vorzeichen und für gerade i ein positives Vorzeichen erhalten. Für ein alternierendes Vorzeichen sorgen wir mit dem Faktor $(-1)^i$. Betrachten wir nun nocheinmal die Ausdrücke für a_2, a_4 und a_6 stellvertretend für alle anderen Koeffizienten. Klammern wir in den Nennern jeweils den Faktor 2 aus, so finden wir

$$\begin{aligned}
a_2 &= -a_0 \cdot \frac{1}{4\,(\nu+1)}\ , \\
a_4 &= a_0 \cdot \frac{1}{4\,(\nu+1)} \cdot \frac{1}{8\,(\nu+2)} = a_0 \cdot \frac{1}{4 \cdot 8\,(\nu+2)(\nu+1)}\ , \\
a_6 &= -a_0 \cdot \frac{1}{4\,(\nu+1)} \cdot \frac{1}{8\,(\nu+2)} \cdot \frac{1}{12\,(\nu+3)} = -a_0 \cdot \frac{1}{4 \cdot 8 \cdot 12\,(\nu+3)(\nu+2)(\nu+1)}\ , \text{ und so weiter} \quad .
\end{aligned}$$

Uns fällt nun auf, dass sich die Faktoren $(\nu+1), (\nu+2)$ bzw. $(\nu+3)$ im Prinzip wie $(\nu+i)!$ verhalten, jedoch nur bis $(\nu+1)$ laufen und somit die Terme $\nu \cdot (\nu-1) \cdot \ldots = \nu!$ fehlen. Aus eben diesem Grund erweitern wir nun mit $\nu!$ und sorgen somit dafür, dass wir im Nenner $(\nu+i)!$ schreiben können. Wir erhalten:

$$a_2 = -a_0 \cdot \frac{\nu!}{4\,(\nu+1)!}\ ,$$
$$a_4 = a_0 \cdot \frac{\nu!}{4\cdot 8\,(\nu+2)!}\ ,$$
$$a_6 = -a_0 \cdot \frac{\nu!}{4\cdot 8\cdot 12\,(\nu+3)!}\ , \text{ und so weiter} \quad .$$

Nun stören uns lediglich noch die Vorfaktoren vor den $(\nu+i)!$ im Nenner. Da wir auf den ersten Blick keine andere Idee haben, schreiben wir die Vorfaktoren einfach mal als „Potenzen von 2 mal Restfaktor“. Wir finden:

$$a_2 = -a_0 \cdot \frac{\nu!}{2^2\cdot 1\,(\nu+1)!} = -a_0 \cdot \frac{\nu!}{2^2\cdot 1!\,(\nu+1)!}\ ,$$
$$a_4 = a_0 \cdot \frac{\nu!}{2^4\cdot 2\,(\nu+2)!} = a_0 \cdot \frac{\nu!}{2^4\cdot 2!\,(\nu+2)!}\ ,$$
$$a_6 = -a_0 \cdot \frac{\nu!}{2^6\cdot 6\,(\nu+3)!} = -a_0 \cdot \frac{\nu!}{2^6\cdot 3!\,(\nu+3)!}\ , \text{ und so weiter} \quad .$$

Offensichtlich verhält sich dieser Vorfaktor wie $2^{2i}\cdot i!$. Insgesamt erhalten wir für den allgemeinen Koeffizienten

$$a_{2i} = (-1)^i \cdot \frac{a_0\,\nu!}{2^{2i}\cdot i!\,(\nu+i)!}\ . \tag{3.1.8}$$

Genau genommen, ist die Richtigkeit dieses Ausdruckes noch mit Hilfe der **vollständigen Induktion** zu zeigen. An dieser Stelle verzichten wir darauf. Nun sind wir, unter Verwendung von (3.1.8), in der Lage eine Lösung der Bessel'schen Differenzialgleichung anzugeben. Durch Einsetzen der Koeffizienten in unseren Potenzreihenansatz (3.1.3) finden wir

$$R(z) = a_0\,z^\nu \cdot \left\{1 - \frac{\nu!\,z^2}{2^2\,1!\,(\nu+1)!} + \frac{\nu!\,z^4}{2^4\,2!\,(\nu+2)!} - \ldots\right\} = a_0 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\nu!\,z^{\nu+2m}}{2^{2m}\,m!\,(\nu+m)!}\ .$$

Erweitern mit $2^{\nu+2m}/2^{\nu+2m}$ liefert schließlich

$$R(z) = a_0\,2^\nu\,\nu! \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{j!(\nu+j)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\ . \tag{3.1.9}$$

Letztendlich können wir noch die Summe in (3.1.9) als **Besselfunktionen erster Art** $J_\nu(z)$ identifizieren:

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{j!(\nu+j)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}\ . \tag{3.1.10}$$

Bemerkung: Für $\nu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ bilden $J_\nu(z)$ und $J_{-\nu}(z)$ ein Lösungsfundamentalsystem der Bessel'schen Differentialgleichung. Es gilt $J_{-\nu}(z) = (-1)^\nu J_\nu(z)$. Ist $\nu = n \in \mathbb{N}$, so ist die Funktion $J_{-n}(z)$ nicht definiert. Allerdings lässt sich dann mit Hilfe der sog. **Besselfunktion zweiter Art**, oder auch **Neumann'schen Funktion**, $N_n(z)$ (manchmal auch $Y_n(z)$) ein Lösungsfundamentalsystem angeben. Hier gilt:

$$N_n(z) = \lim_{\nu\longrightarrow n} \frac{J_\nu(z)\cdot\cos(\nu\,\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\,\pi)}\ .$$

Die allgemeinste Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung für beliebige ν erhält man letztendlich durch

$$R(z) = A\cdot J_\nu(z) + B\cdot N_\nu(z)\ ,$$

wobei die Konstanten A, B aus den Anfangs- bzw. Randbedingungen zu bestimmen sind.

Auf den nächsten Seiten betrachten wir abschließend einige graphische Veranschaulichungen von $J_\nu(z)$ und $N_\nu(z)$, sowie der kreisförmigen Membran.

Zuerst betrachten wir die ersten drei Besselfunktionen erster Art:

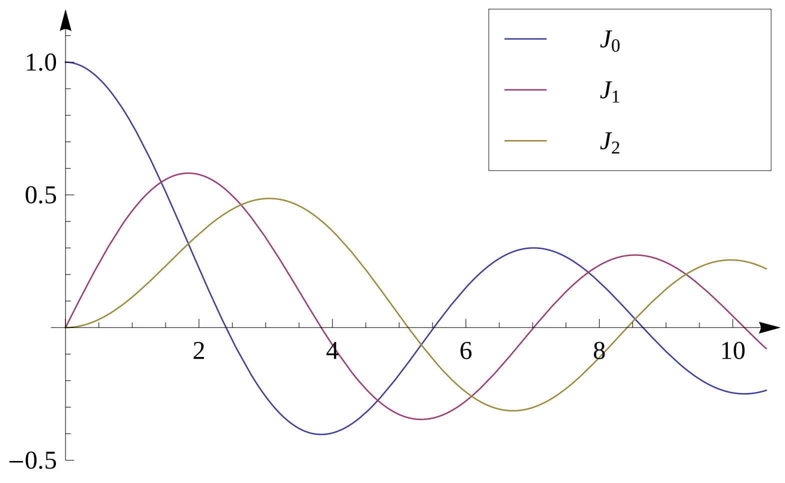


Abbildung 3.1: Besselfunktionen erster Art: J_0, J_1 und J_3.

Hier die ersten drei Besselfunktionen zweiter Art:

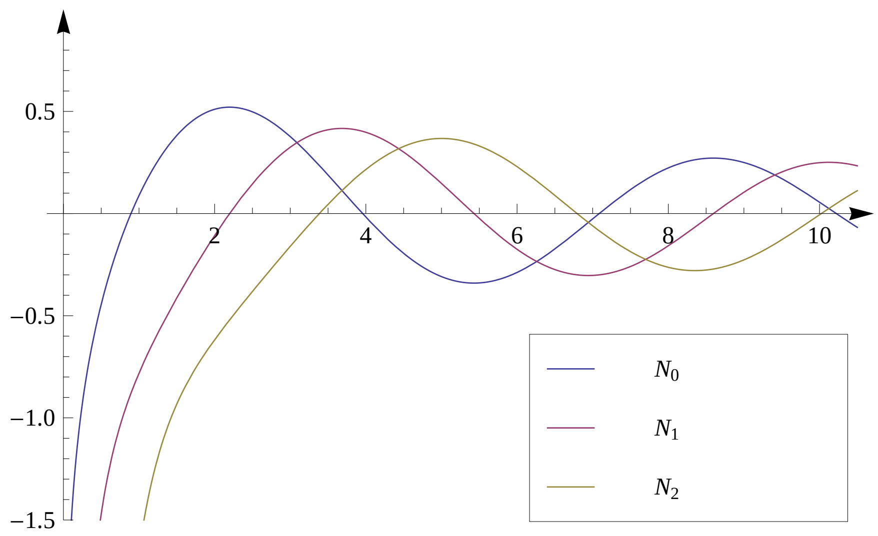
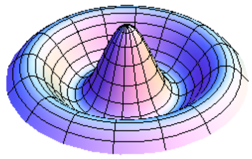
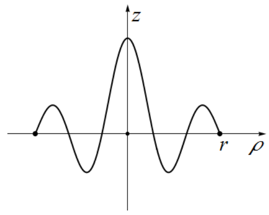


Abbildung 3.2: Besselfunktionen zweiter Art: N_0, N_1 und N_2.

Ursprünglich waren wir bei der Wellengleichung der kreisförmigen Membran gestartet und kamen durch einen Separationsansatz darauf, dass sich in radialer Richtung die Schwingungen gemäß der Besselfunktionen erster Art J_n ausbreiten. Aus eben diesem Grund sehen wir uns noch einige Oberschwingungen und die zugehörigen Radialwellen der kreisförmigen Membran an.

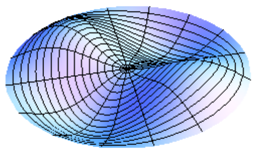


(a) kreisförmige Membran

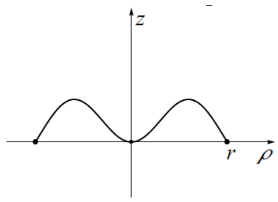


(b) Radialschwingung

Abbildung 3.3: (a) Zeigt eine Grundschwingungsmode der kreisförmigen Membran. (b) Zeigt die Schwingungsausbreitung in Radialrichtung.

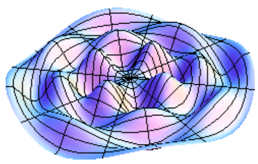


(a) kreisförmige Membran

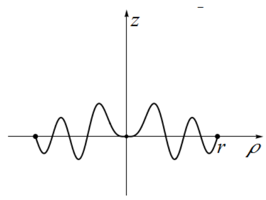


(b) Radialschwingung

Abbildung 3.4: (a) Zeigt eine der zweiten Moden der kreisförmigen Membran. (b) Zeigt die Schwingungsausbreitung in Radialrichtung.



(a) kreisförmige Membran



(b) Radialschwingung

Abbildung 3.5: (a) Zeigt eine der vierten Moden der kreisförmigen Membran. (b) Zeigt die Schwingungsausbreitung in Radialrichtung.

Kapitel 4

Allgemeine Bemerkungen

Abschließend noch einige (evtl.) wichtige Bemerkungen.

4.1 Ein wohlgestellten Problem

Der französische Mathematiker Jacques Hadamard (1865 - 1963) nannte folgende Kriterien für ein **wohlgestelltes Problem**:

(i) **Existenz einer Lösung**:

Theorem 4.1.1. *(Existenz einer Lösung, Picard-Lindelöf)*
$I \subset \mathbb{R}$ sei abgeschlossenes Intervall, $t_0 \in I$, $\lambda \geq 0$. Ferner sei $f : I \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und erfülle $\forall\, t \in I$, dass $f(t, x(t)) : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ λ-Lipschitz-stetig ist.
Zu jedem $x_0 \in \mathbb{K}^n$ besitzt dann das Problem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \text{in } I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

genau eine Lösung $x(t) : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$.

(ii) **Eindeutigkeit der Lösung**:

Satz 4.1.2. *(Eindeutigkeit beim nichtlinearen Anfangswertproblem)*
Für ein $\lambda > 0$ erfülle die Funktion $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die Bedingung, dass $\forall\, t \in [t_0, T]$ die Funktion $f(t, x(t)) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ λ-Lipschitz-stetig ist. Ferner sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig.
Dann gibt es höchstens eine differenzierbare Lösung $x(t) : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des nichtautonomen Anfangswertproblems erster Ordnung

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall\, t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0\ . \end{cases}$$

(iii) **Stetige Abhängigkeit von den gegebenen Daten**:

Satz 4.1.3. *(Stetige Abhängigkeit von den Daten)*
$f : [t_0, T] \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ sei beschränkt und λ-Lipschitz-stetig bzgl. des zweiten Arguments mit $\lambda > 0$. $g : [t_0, T] \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ sei beschränkt. $x(t), y(t) : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ seien Lösungen von

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ y'(t) = g(t, y(t)) \end{cases} \qquad \text{in } [t_0, T]\,.$$

Dann gilt $\forall\, t \in [t_0, T]$

$$|x(t) - y(t)| \leq \Big\{ |x(t_0) - y(t_0)| + |t - t_0| \cdot \|f - g\|_{sup} \Big\} \cdot \exp\left(\lambda\ |t - t_0|\right)\ .$$

4.2 Schwache und Wesentliche Singularitäten

In Kapitel 3 haben wir uns ausführlich mit der Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung durch Potenzreihenentwicklung auseinandergesetzt. Am Anfang der Diskussion sind uns die Ausdrücke **schwache** und **wesentliche Singularität** begegnet. Man hat sich natürlich die Frage gestellt, wieso man „auf den ersten Blick“ gesehen hat, dass es sich bei $z = 0$ um eine schwache und bei $z = \infty$ um eine wesentliche Singularität handelt. Zunächst werden wir uns klarmachen, was diese Ausdrücke überhaupt bedeuten, zusätzlich werden wir unseren „ersten Blick“ anhand der Bessel'schen Differentialgleichung verifizieren.

Eine lineare homogene ODE zweiter Ordnung lässt sich auf die folgende Form bringen:

$$x''(t) + P(t) \cdot x'(t) + Q(t) \cdot x(t) = 0. \tag{4.1.1}$$

Bleiben die Funktionen $P(t)$ und $Q(t)$ endlich für $t = t_0$, so handelt es sich bei $t = t_0$ um einen gewöhnlichen Punkt. Sollten aber $P(t)$ oder $Q(t)$ (oder beide) für $t \longrightarrow t_0$ divergieren, so handelt es sich bei t_0 um eine Singularität. Nun können wir zwischen zwei verschieden Arten von Singularitäten unterscheiden.

(i) Divergieren $P(t)$ oder $Q(t)$ für $t \longrightarrow t_0$, bleiben aber jedoch $(t-t_0) \cdot P(t)$ und $(t-t_0)^2 \cdot Q(t)$ endlich für $t \longrightarrow t_0$, so nennt man $t = t_0$ eine schwache Singularität.

(ii) Divergiert der Ausdruck $(t - t_0) \cdot P(z)$ für $t \longrightarrow t_0$ oder divergiert der Ausdruck $(t - t_0)^2 \cdot Q(t)$ für $t \longrightarrow t_0$, so nennt man $t = t_0$ eine wesentliche Singularität.

Diese Definitionen gelten für alle endlichen Werte von $t = t_0$. Betrachten wir nun als Beispiel die Bessel'sche Differentialgleichung (3.1.2).

Beispiel 9: Singularitäten in der Bessel'schen Differentialgleichung. Durch Koeffizientenvergleich von (4.1.1) mit (3.1.2) erhalten wir:

$$P(z) = \frac{1}{z}\,, \qquad Q(z) = 1 - \frac{\nu^2}{z^2}\ .$$

Auf den ersten Blick erkennen wir, dass für $z = 0$ die Ausdrücke $(z-0)\cdot P(z) = z\cdot P(z)$ und $(z-0)^2\cdot Q(z) = z^2 \cdot Q(z)$ endlich bleiben und es sich in $z = 0$ somit um eine schwache Singularität handelt. Diese ist, wie man leicht sehen kann auch die einzige Singularität im endlichen Bereich. Für den Grenzübergang $z \longrightarrow \infty$ müssen wir uns eine andere Strategie einfallen lassen. Deshalb gehen wir noch einmal in Gleichung (4.1.1) und benutzen die Substitution $t = 1/\xi$ und lassen nun $\xi \longrightarrow 0$ laufen. Wir müssen nun allerdings beachten, dass die Differentiale sich auch transformieren. Somit finden wir für die Differentiale folgende Rechnungen:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{t^2}\,\frac{\mathrm{d}x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi} = -\xi^2\,\frac{\mathrm{d}x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(-\xi^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \left(-\xi^2\right)\left(-2\xi\,\frac{\mathrm{d}x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi} - \xi^2\,\frac{\mathrm{d}^2x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi^2}\right) \\
&= 2\xi^3\,\frac{\mathrm{d}x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi} + \xi^4\,\frac{\mathrm{d}^2x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi^2}\ .
\end{aligned}$$

Einsetzen dieser Resultate in (4.1.1) liefert

$$\xi^4\,\frac{\mathrm{d}^2x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi^2} + \left\{2\xi^3 - \xi^2 P(\xi^{-1})\right\}\,\frac{\mathrm{d}x(\xi^{-1})}{\mathrm{d}\xi} + Q(\xi^{-1})\,x(\xi^{-1}) = 0\ .$$

Das Verhalten für $\xi = 0$ (entspricht $t = \infty$) hängt nun von den folgenden Koeffizienten ab:

$$\tilde{P}(\xi) = \frac{2\xi - P(\xi^{-1})}{\xi^2}, \qquad \tilde{Q}(\xi) = \frac{Q(\xi^{-1})}{\xi^4}\ .$$

Für die Bessel'sche Differentialgleichung ergeben sich die folgenden Koeffizienten:

$$\tilde{P}(\xi) = \frac{2\xi - \xi}{\xi^2}, \qquad \tilde{Q}(\xi) = \frac{1 - \nu^2\xi^2}{\xi^4} \ .$$

Wir erkennen, dass beide Ausdrücke für $\xi \longrightarrow 0$ divergieren. Somit wissen wir, dass sich in $t = \infty$ eine wesentliche Singularität befindet und unser „erster Blick" in Kapitel 3 korrekt war.