Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2012/2013**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Mathe-Test

Aufgabe 1: Bruchrechnung

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf

(a) $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4}$

(b) $2x + (4 - 2u)\frac{ux+3}{u-1} = 0$

Aufgabe 2: Differentiation

Geben Sie die Ableitung folgender Funktionen an

- Produktregel
  (a) $f(x) = u(x)v(x)$
  (b) $f(x) = x^2 \sin x$
- Quotientenregel
  (a) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
  (b) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$
- Kettenregel
  (a) $f(x) = u[v(x)]$
  (b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+5x}$

Aufgabe 3: Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+5}{n^2+1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0} x \ln x$

Aufgabe 4: Integration

(a) Partielle Integration. Rechenvorschrift:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Tipp: Benutzen Sie $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha)]$.

(b) Substitution. Rechenvorschrift:

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

Berechnen Sie $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ mit der Substitution $u(x) = x^2$.

(c) Partialbruchzerlegung. Berechnen Sie $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Formen Sie den Bruch durch Partialbruchzerlegung in die Form

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = P_3(x) + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2}$$

um. Dabei ist P_3 ein Polynom und a_1 und a_2 die Nullstellen des Nenners sowie A_1 und A_2 zu berechnende Konstanten.

Aufgabe 5: Vektorrechnung
Die folgenden Vektoren sind in Komponentendarstellung bzgl. einer kartesischen Basis im $\mathbb{R}^3$ zu verstehen. Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke bzw. beantworten Sie die folgenden Fragen.

- Addition, Subtraktion, Längen und Winkel von Vektoren:
  (a) $\vec{a} + \vec{b}$
  (b) $\vec{a} - \vec{b}$
  (c) $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$
  (d) $\angle(\vec{a}, \vec{b})$
- Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt:
  (a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$
  (b) $\vec{a} \times \vec{b}$. Was bedeutet dieses Produkt geometrisch?
  (c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}$. Was bedeutet dieser Ausdruck geometrisch?
- Linearkombinationen
  (a) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig?
  (b) Liegt $\vec{c}$ in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene?

Aufgabe 6: Komplexe Zahlen
Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 9 - 7\mathrm{i}$ und $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$.

- Grundrechenarten: Berechnen Sie
  (a) $z_1 + z_2$
  (b) $z_1 z_2$
  (c) $\frac{z_1}{z_2}$
- Darstellung in Polarform $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ($\theta \in (-\pi, \pi]$). Stellen Sie $z_3 = -1 - \mathrm{i}$ in Polarform dar!

Aufgabe 7: Einfache lineare Differentialgleichungen

Eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung besitzt die Form

$$a_0(x) + a_1(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = 0.$$

Falls $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ genau n voneinander linear unabhängige Lösungen sind, so lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + \cdots + A_n x_n(t),$$

wobei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beliebige „Integrationskonstanten“ sind.
Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen an.

(a) $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$

(b) $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x.$

(c) Welche zusätzlichen Angaben braucht man jeweils, um eine Lösung eindeutig festzulegen, damit die Koeffizienten $A_1, \ldots, A_n$ eindeutig bestimmt werden können?