Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 12

Präsenzübungen

(P30) Das Garagen-Paradoxon

Es kann selbstverständlich mit der Beschreibung der raumzeitlichen Verhältnisse von physikalisch möglichen Vorgängen in der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) keine Widersprüche zwischen verschiedenen Beobachtern geben. In der Vorlesung wurde nämlich gezeigt, daß die Minkowski-Raumzeit eine konsistente Kausalstruktur beschreibt, d.h. die Kausalfolge der Ereignisse unter eigentlich orthochronen Lorentztransformationen[1] ungeändert bleibt. Ansonsten liefert die Lorentz-Transformation als umkehrbare Transformation äquivalente Beschreibungen eines Sachverhaltes, die lediglich von gegeneinander (schnell) gleichförmig bewegten Beobachtern in Inertialsystemen betrachtet werden.

In Fragestellungen wie denen in dieser Aufgabe, empfiehlt es sich, die Situation zum einen durch kovariante Größen auszudrücken. In unserem Fall sind das die Ruhelängen des Autos $L_{A0} = 5$ m und der Garage $L_{G0} = 5$ m.

Weiter drücken wir die einzelnen Weltlinien der betrachteten Gegenstände mit Raum-Zeitkoordinaten in jeweils einem Bezugssystem aus und betrachten die Vorgänge in jedem Bezugssystem getrennt.

Um von einem Bezugssystem ins andere umzurechnen, müssen wir lediglich die Lorentztransformation anwenden. Seien x und t die Raum-Zeitkoordinaten bzgl. des Ruhsystems der Garage Σ. Genauso seien x' und t' die Raum-Zeitkoordinaten im Ruhsystem des Autos Σ'. Es bewege sich Σ' bzgl. Σ entlang der positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$. Dann gilt die Lorentztransformation

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right), \\ x &= \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei haben wir den Lorentz-Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ eingeführt.

Wir legen die Koordinatensysteme und Zeitnullpunkte dabei so fest, daß die Situation, wo in Σ das hintere Ende des Autos gerade am vorderen Eingang angelangt ist bei $t = 0$ eintritt. Hinteres und vorderes Ende durchlaufen offenbar von Σ aus betrachtet die Trajektorien

$$x_{A1} = vt, \quad x_{A2} = L_A + vt. \tag{2}$$

Dabei ist L_A die Länge des Autos, gemessen in Σ.

Im System Σ' ruht das Auto, und folglich werden beide Punkte durch

$$x'_{A1} = 0, \quad x'_{A2} = L_{A0} \tag{3}$$

beschrieben. Um L_A als Funktion der invarianten Ruhelänge des Autos L_{A0} zu bestimmen, müssen wir nur die Lorentz-Transformation anwenden:

$$x_{A1} = \gamma v t', \quad t_{A1} = \gamma t' \Rightarrow x_{A1} = vt \tag{4}$$

[1] Eine eigentlich orthochrone Lorentztransformation ist eine lineare Abbildung der Raum-Zeit-Koordinaten von Ereignissen in einem Inertialsystem auf die Raum-Zeit-Koordinaten derselben Ereignisse in einem beliebigen anderen Inertialsystem, so daß der Minkowskiabstand ungeändert bleibt sowie die Zeitintervalle für zeitartig zueinander gelegene Ereignisse ihr Vorzeichen beibehalten.

in Übereinstimmung mit (2). Weiter ist

$$x_{A2} = \gamma(L_{A0} + vt'), \quad t = \gamma(t' + \beta/cL_{A0}) \Rightarrow x_{A2} = \gamma(L_{A0} + vt/\gamma - \beta^2 L_{A0}) = \frac{L_{A0}}{\gamma} + vt. \tag{5}$$

Durch Vergleich mit (1) sehen wir, daß $L_A = L_{A0}/\gamma$ ist. Das Auto ist also um den Lorentzfaktor verkürzt (Längenkontraktion), wobei laut Aufgabenstellung $\gamma = 2$ ist. Daraus folgt

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}833. \tag{6}$$

Auf dieselbe Weise folgt für die Trajektorien des vorderen und hinteren Garagentors in den beiden Bezugssystemen Σ und Σ'

$$x_{G1} = 0, \quad x_{G2} = L_{G0}, \quad x'_{G1} = -vt', \quad x'_{G2} = L_G - vt' = \frac{L_{G0}}{\gamma} - vt'. \tag{7}$$

Jetzt können wir leicht die Vorgänge in den beiden Fällen betrachten.

(a) Im System Σ fährt das Auto einfach durch die beiderseits offene Garage hindurch. Zur Zeit $t_1 = -L_A/v = -L_{A0}/(\gamma v)$ befindet sich gemäß (2) bzw. (5) das vordere Ende des Autos gerade bei der linken Garageneinfahrt und das hintere Ende des Autos gerade bei $x_{A1}(t_1) = -L_A = -L_{A0}/\gamma = -2{,}5$ m. Bei $t_2 = 0$ ist hingegen das vordere Ende in der Mitte der Garage $x_{A2}(t_2) = L_A = L_{A0}/\gamma = 2{,}5$ m und das hintere Ende des Autos am vorderen Garagentor $x_{A1}(t_2) = 0$. Das Auto ist also vollständig in der Garage. Zur Zeit $t_3 = L_A/v = L_{A0}/(\gamma v)$ bewegt sich das vordere Ende des Autos gerade durch das hintere Tor: $x_{A2}(t_3) = 2L_A = 2L_{A0}/\gamma = 5$ m, und das hintere Ende befindet sich in der Mitte der Garage: $x_{A1}(t_3) = L_A = L_{A0}/\gamma = 2{,}5$ m. Für $t \in (t_2, t_3)$ ist also **das Auto vollständig in der Garage**. Für $t > t_3$ befindet sich zumindest das vordere Ende des Autos außerhalb der Garage.

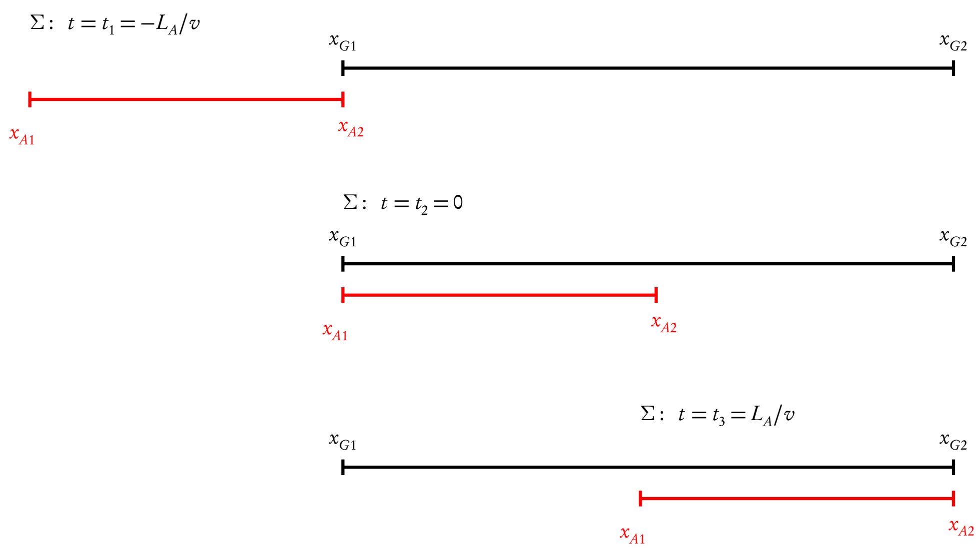


Abbildung 1: Die Situation, wie sie sich für einen Beobachter im Ruhsystem der Garage Σ darstellt.

Vom System Σ' betrachtet bleibt das Auto beständig in Ruhe und die Garage bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in negative x'-Richtung. Zur Zeit $t'_1 = -L_{A0}/v$ befindet sich das vordere Garagentor bei $x'_{G1}(t'_1) = L_{A0} = 5$ m also beim vorderen Ende des Autos und das hintere Garagentor bei $x_{G2}(t'_1) = L_{A0} + L_G = 7{,}5$ m. Zur Zeit $t'_2 = (L_G - L_{A0})/v$ befindet sich das hintere Garagentor am vorderen Ende des Autos, $x'_{G2}(t'_2) = L_{A0} = 5$ m, und das vordere Ende der Garage bei $x_{1G}(t'_2) = L_{A0} - L_G = 2{,}5$ m. Das hintere Ende des Autos ist allerdings außerhalb der Garage bei $x'_{1A}(t'_2) = 0$. Bei $t'_3 = 0$ schließlich befindet sich das hintere Ende des Autos beim vorderen Garagentor: $x'_{G1}(t'_3) = 0$ und das vordere Garagentor auf der Höhe der Mitte des Autos $x'_{G2}(t'_3) = L_G = L_{G0}/\gamma = 2{,}5$ m. Die Front des Autos ist aber bei $x'_{A2}(t'_3) = L_{A0} = 5$ m. Das Auto befindet sich also **zu keinem Zeitpunkt vollständig in der Garage**. Es ergeben sich also auch bzgl. des Fahrers im Ruhsystem des Autos Σ' keinerlei Widersprüche.

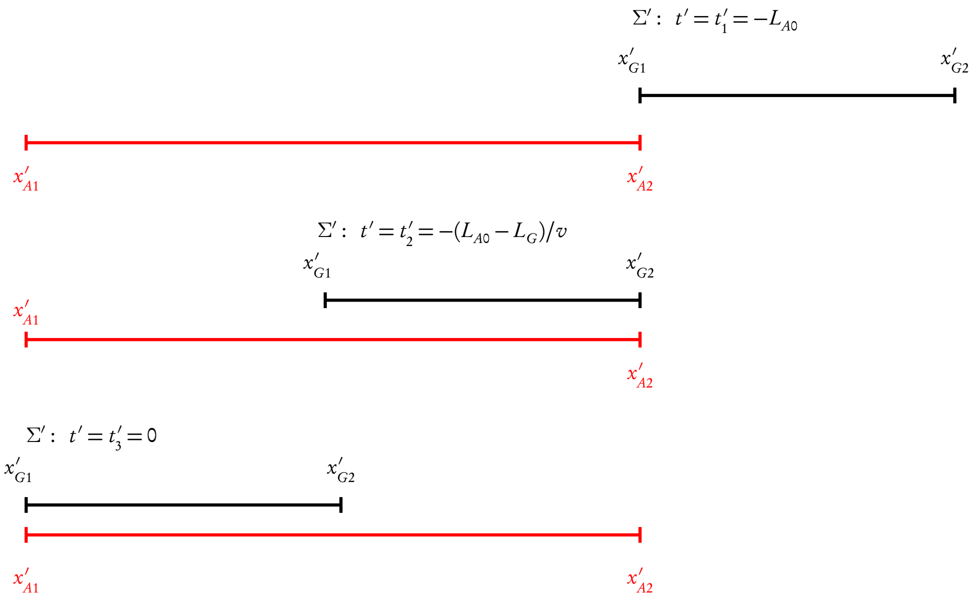


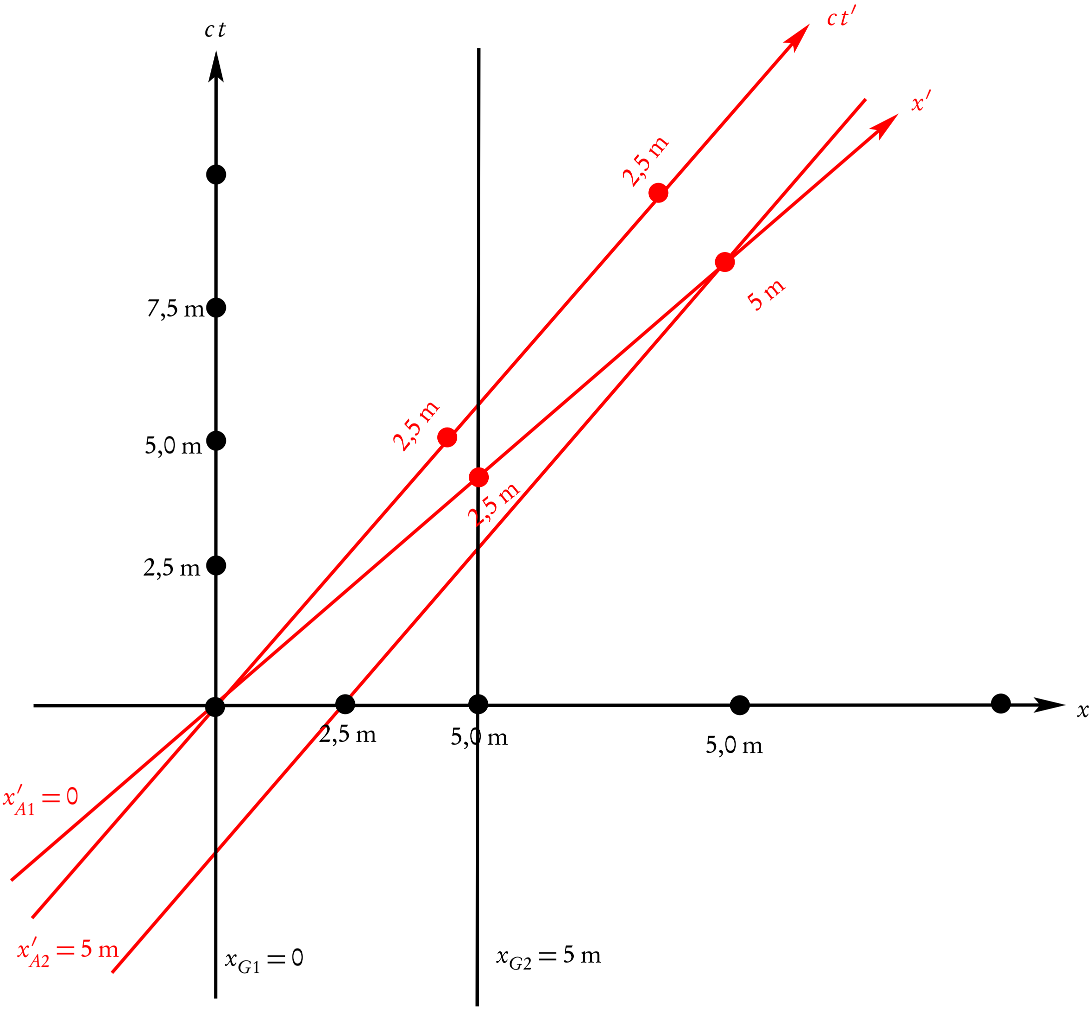
Abbildung 2: Die Situation, wie sie sich für den Fahrer im Ruhsystem des Autos Σ' darstellt.

(b) Hier ergibt sich natürlich auch kein Widerspruch. Vom System Σ aus betrachtet ist der Sachverhalt folgender: Während des Zeitintervalls $t_2 \leq t \leq t_3$ kann man das vordere Garagentor schließen und das Auto ist auch noch intakt. Bei $t = t_3$ kollidiert das vordere Ende des Autos mit der hinteren verschlossenen Garagentür, und das Auto faltet sich zusammen (vorausgesetzt diese Garagentür ist hinreichend stabil ;-)). Das Auto bleibt also beständig im Inneren der Garage, wird aber beliebig schlimm zerknautscht.

Vom System Σ' aus betrachtet ist das Auto nie in intaktem Zustand vollständig in der Garage. Vielmehr knallt es mit seiner Front zur Zeit t'_2 gegen die vordere geschlossene Garagentür und beginnt sich infolgedessen aufzufalten. Erst wenn es so weit zusammengefaltet ist, daß sich das Auto auf die halbe Länge, entsprechend der Länge der Garage in diesem Bezugssystem, zusammengeschoben hat, kann man das vordere Garagentor schließen. Auch hier ergeben sich also keine Widersprüche.

Es ist lediglich etwas ungewohnt, daß aufgrund der großen Geschwindigkeit des Autos von immerhin rund 83,3% der Lichtgeschwindigkeit die Relativität der Gleichzeitigkeit und Längenkontraktion bewegter Gegenstände zu beachten ist, so daß in Σ das Auto für bestimmte Zeiten $t \in (t_2, t_3)$ vollständig intakt im Inneren der Garage sein kann, niemals jedoch im System Σ'. In jedem Bezugssystem ergeben sich aber völlig widerspruchsfreie Beschreibungen des Vorgangs, ein Auto in einen Totalschaden zu verwandeln.

Eine alternative Sicht desselben Sachverhalts ergibt sich durch Betrachtung des folgenden Minkowski-Diagrams:



Die Raum-Zeitachsen des Ruhesystems der Garage Σ sind schwarz und die des Ruhesystems des Autos Σ' rot eingezeichnet. Die Weltlinien der Garage sind $x_{G1} = 0 = \text{const}$ und $x_{G2} = 5\ \text{m} = \text{const}$ und die des Autos $x'_{A1} = 0 = \text{const}$ und $x'_{A2} = 5\ \text{m} = \text{const}$. Es wird deutlich, daß die Länge des Autos im System Σ um den Lorentzfaktor $\gamma = 2$ verkürzt erscheint und ebenso die Länge der Garage im System Σ' („**Längenkontraktion**“).

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich, im System Σ betrachtet, das Auto vollständig in der Garage. Allerdings sind die beiden Schnittpunkte der Geraden $x'_{A1} = \text{const}$ und $x'_{A2} = \text{const}$ mit der der x-Achse bzgl. des Systems Σ' nicht gleichzeitig („**Relativität der Gleichzeitigkeit**“). Zur Zeit $t' = 0$ befindet sich das hintere Ende des Autos zwar ebenfalls bei $x = x' = 0$, das vordere Ende jedoch zu dieser Zeit bei $x'_{A2} = 5$ m. Es wird auch deutlich, daß sich bzgl. des Systems Σ' nie beide Enden des Autos gleichzeitig in der Garage befinden.

Bemerkung: Man muß beim Ablesen der Raumzeit-Koordinaten bzgl. der beiden Bezugssysteme bedenken, daß zwar die Raum-Zeitachsen des Systems Σ (willkürlich) als rechtwinkliges Koordinatensystem gezeichnet wurden, dann aber notwendig die Raum-Zeitachsen des Systems Σ' ein schiefwinkliges Koordinatensystem darstellen. Ebenso erscheinen die Längeneinheiten auf den Achsen von Σ' gegenüber denen des Systems Σ gestreckt.

Der Grund dafür liegt darin, daß die Lorentz-Transformation zwar im Sinne der in dieser Vorlesung gewählten „Imaginärzeitkonvention“ orthogonal ist, allerdings mit einem komplexen Drehwinkel:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathrm{i}\eta) & -\sin(\mathrm{i}\eta) \\ \sin(\mathrm{i}\eta) & \cos(\mathrm{i}\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}ct \\ x \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Nun ist aber

$$\cos(\mathrm{i}\eta) = \cosh\eta, \quad \sin(\mathrm{i}\eta) = \mathrm{i}\sinh(\eta). \tag{9}$$

Setzen wir dies ein, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\mathrm{i}\sinh\eta \\ \mathrm{i}\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}ct \\ x \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Wir können die Lorentztransformation nun direkt auch als lineare Abbildung zwischen den reellen Koordinaten schreiben:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta \\ -\sinh\eta & \cosh\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Das ist zwar eine lineare Abbildung aber keine orthogonale, so daß die Winkel der Achsen sowie die Einheitslängen für die Koordinatenachsen im MinkowskiDiagramm verschiedener Inertialsysteme verschieden sind.

Der Zusammenhang zu dem physikalischen Parameter $v = \beta c$ (Relativgeschwindigkeit der Bezugssysteme) ergibt sich durch Vergleich von (11) mit der oberen Zeile von (1) zu

$$\cosh\eta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh\eta = \beta\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{12}$$

Für die Relativgeschwindigkeit folgt daraus

$$\beta = \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta} = \tanh\eta. \tag{13}$$
