Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees | Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 9

Präsenzübungen

(P24) Streuung eines Elektrons an einem Kern

(a) Für $t \to -\infty$ lesen wir die Behauptung unmittelbar aus der Skizze ab, denn die blaue Strecke b steht senkrecht auf der Richtung von $\vec{p}_{\text{in}} = p_\infty \vec{e}_{\text{in}}$ und damit ist

$$\ell = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right|_{t \to -\infty} = p_\infty b = b\sqrt{\frac{2E}{m_{\text{e}}}}. \tag{1}$$

(b) Beide Hyperbeläste werden gemäß Hausübung (H22) durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\tilde{b}^2} = 1 \tag{2}$$

beschrieben. Dies nach y aufgelöst ergibt

$$y = \pm\sqrt{\frac{\tilde{b}^2}{a^2}x^2 - \tilde{b}^2}. \tag{3}$$

Für $x \to \pm\infty$ kann man $\tilde{b}^2$ unter der Wurzel vernachlässigen, und dies liefert die Geradengleichungen für die Asymptoten:

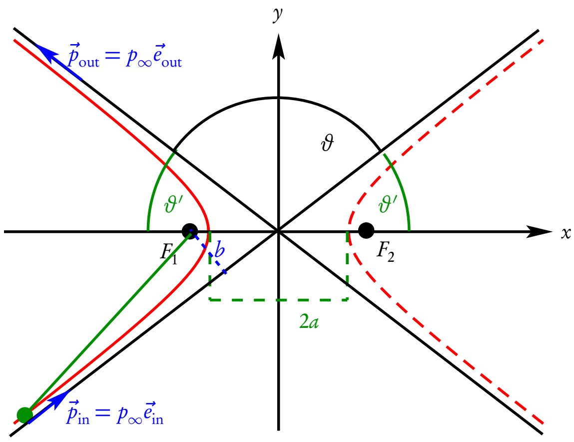
$$y = \pm\frac{\tilde{b}}{a}x. \tag{4}$$

Weiter ist

$$\tilde{b}^2 = e^2 - a^2 = a^2(\epsilon^2 - 1) \Rightarrow \tilde{b} = a\sqrt{\epsilon^2 - 1}. \tag{5}$$

Aus der Steigung der Asymptoten ergibt sich also gemäß der Skizze

$$\tan\vartheta' = \frac{\tilde{b}}{a} = \sqrt{\epsilon^2 - 1}. \tag{6}$$



(c) Für den Streuwinkel gilt $\vartheta + 2\vartheta' = \pi$ und also

$$\vartheta' = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}. \tag{7}$$

Nimmt man davon den Tangens, ergibt sich aus (5)

$$\tan\vartheta' = \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right) = \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \tag{8}$$

Mit Gl. (2) auf dem Aufgabenblatt ergibt sich

$$\sqrt{\epsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{2E\ell^2}{m_e K^2}} = \frac{2bE}{K} \overset{(8)}{=} \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \tag{9}$$

Dies nach b aufgelöst liefert

$$b = \frac{K}{2E} \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \tag{10}$$

(d) Aus der Definition des Wirkungsquerschnitts, Gl. (3) auf dem Übungsblatt, folgt schließlich

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\vartheta} = 2\pi b \left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\vartheta}\right| = \left(\frac{K}{2E}\right)^2 \frac{\pi\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)}. \tag{11}$$

(e) Zur Umrechnung auf den differentiellen Streuquerschnitt bzgl. des Raumwinkels verwenden wir

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\vartheta\, 2\pi \sin\vartheta. \tag{12}$$

Mit der Kettenregel folgt dann schließlich

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\vartheta}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\Omega} \overset{(11)}{=} \left(\frac{K}{2E}\right)^2 \frac{\pi\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)} \frac{1}{2\pi\sin\vartheta} = \left(\frac{K}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}. \tag{13}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Doppelwinkelformel

$$\sin\vartheta = 2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{14}$$

verwendet.

Anmerkung 1: Der Streuquerschnitt (13) hat eine bedeutende Rolle bei der Aufklärung des Aufbaus der Atome gespielt. Als in 1911 Rutherford α-Teilchen, also Heliumkerne mit der Ladung $2e$ aus dem Zerfall radioaktiver Materialien auf eine Goldfolie schoß, stellte er fest, daß diese entgegen seinen Erwartungen fast ungestört durch diese Folie hindurchdringen und nur wenige abgelenkt oder gar zurückgestreut werden. Er kam dadurch zu dem Schluß, daß Atome weitgehend leer sein müssen und aus einem für seine Beobachtungen praktisch punktförmigen positiv geladenen Kern bestehen, der von den negativ geladenen Elektronen umkreist wird. Er stellte dann die Formel (13) für den Streuquerschnitt auf und fand gute Übereinstimmung mit seinen Messungen. Das war die Geburtsstunde der modernen Atomphysik, denn Bohr stellte bei einem Forschungsaufenthalt bei Rutherford sein berühmtes Atommodell (1913) auf, was schließlich zur Entwicklung der engültigen Quantentheorie (Heisenberg, Born, Jordan 1925/26; Schrödinger 1926; Dirac 1925-27) geführt hat.

Anmerkung 2: Die Formel (13) gilt auch exakt in der nichtrelativistischen Quantentheorie (solange man unterscheidbare Teilchen aufeinanderschießt, die aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung aneinander streuen).

Der Streuquerschnitt (13) ist aber physikalisch nicht ganz befriedigend, denn der totale (elastische) Streuquerschnitt, der durch das Integral

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\vartheta} \tag{15}$$

definiert ist, ergibt offenbar keinen Sinn. Setzt man nämlich (13) in (15) ein, sieht man, daß das Integral an der unteren Grenze divergiert, denn für $|\vartheta| \gg 1$ ist $\cos(\vartheta/2)/\sin^3(\vartheta/2) \cong (2/\vartheta)^3$.

Physikalisch ist das durch die lange Reichweite des Coulomb-Potentials, das nur mit $1/r$ abfällt, zu erklären. In der Realität ist ein reines Coulomb-Potential unrealistisch, weil immer noch genügend andere Ladungen in der Nähe sind und das Coulomb-Potential abschirmen, so daß es mehr wie ein sog. Yukawa-Potential $V_{\text{Yuk}}(r) = C \exp(-r/r_0)/r$ mit einer Konstante c und einem Abschirm- oder Debye-Radius r_0 exponentiell abfällt. Dann erhält man einen endlichen totalen Wirkungsquerschnitt, der sich aber selbst in der hier betrachteten klassischen Behandlung nicht mehr geschlossen ausrechnen läßt.

Anmerkung 3: Selbst im akademischen Fall einer reinen Coulomb-Streuung ist aber der hier berechnete elastische Streuquerschnitt, wo man den Fall betrachtet, daß die am Stoß beteiligten Teilchen vor und nach dem Stoß allein vorhanden sind, unrealistisch. Der Grund dafür ist, daß beschleunigte Ladungen stets elektromagnetische Wellen abstrahlen. Quantentheoretisch betrachtet werden also neben den bereits vor dem Stoß vorhandenen geladenen Teilchen auch noch Photonen erzeugt. Da Photonen masselos sind, können beliebig viele Photonen mit sehr geringer Energie erzeugt werden, und man muß berücksichtigen, daß ein Detektor (z.B. in unserem Beispiel für Elektronen) stets eine begrenzte Energieauflösung besitzt, so daß man die Situation, daß im Endzustand außer dem Kern und dem Elektron auch noch ein oder mehrere sehr „weiche Photonen“ erzeugt werden, deren Gesamtenergie unterhalb dieser Energieauflösung ist, von der elastischen Situation, wo keine Photonen produziert werden, nicht mehr unterscheiden kann. Es stellt sich nun heraus, daß der Streuquerschnitt unter Berücksichtigung dieser Produktion „weicher Photonen“ zu einem physikalisch sinnvollen endlichen Wirkungsquerschnitt führt. Dies kann aber klassisch erst mit Hilfe der Maxwellschen Elektrodynamik und quantentheoretisch mit der Quantenelektrodynamik erklärt werden.