Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 8

Hausübungen (Abgabe: 18.01.2013)

(H21) Teilchen im Magnetfeld (5 Punkte)

(a) Leiten wir die kinetische Energie nach der Zeit ab und verwenden die Formel für die Lorentz-Kraft, folgt

$$\dot{E}_{\text{kin}} = m\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = m\vec{v}\cdot(q\vec{v}\times\vec{B}) = 0, \tag{1}$$

denn $\vec{v}\times\vec{B}\perp\vec{v}$ (vgl. die Definition des Kreuzproduktes).

Die von dem Magnetfeld an dem Teilchen verrichtete Leistung (Arbeit pro Zeiteinheit) ist $\vec{F}\cdot\vec{v}$. Da die Lorentzkraft in jedem Moment senkrecht zur Geschwindigkeit des Teilchens gerichtet ist, verschwindet dieses Skalarprodukt zu jedem Zeitpunkt.

(b) Für $\vec{B} = B\vec{e}_z = \text{const}$ folgt als Bewegungsgleichung

$$m\dot{\vec{v}} = m\begin{pmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{pmatrix} = qB\vec{v}\times\vec{e}_z = qB\begin{pmatrix}v_y\\ -v_x\\ 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Wie im Hinweis auf dem Aufgabenblatt vorgeschlagen, setzen wir

$$w = v_x + \mathrm{i}v_y \;\Rightarrow\; \dot{w} = \dot{v}_x + \mathrm{i}\dot{v}_y = \omega_Z(v_y - \mathrm{i}v_x) = -\mathrm{i}\omega_z w. \tag{3}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung die **Zyklotronfrequenz**

$$\omega_Z = \frac{qB}{m} \tag{4}$$

eingeführt. Die DGL (3) für w läßt sich sofort mit dem Exponentialansatz lösen, denn es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die allgemeine Lösung ist

$$w(t) = C\exp(-\mathrm{i}\omega_Z t), \tag{5}$$

wobei $C\in\mathbb{C}$ eine Integrationskonstante ist. Da die Zyklotronfrequenz eine reelle Größe ist und damit das DGL-System für (v_x, v_y) rein reell ist, erhalten wir diese Komponenten durch Bilden des Real- bzw. Imaginärteils der Lösung (5). Mit $\operatorname{Re} C = C_1 \in R$ und $\operatorname{Im} C = C_2 \in \mathbb{R}$ folgt

$$v_x(t) = C_1\cos(\omega_z t) + C_2\sin(\omega_Z t), \quad v_y(t) = -C_1\sin(\omega_z t) + C_2\cos(\omega_Z t). \tag{6}$$

Aus der Anfangsbedingung $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ folgt

$$C_1 = v_{0x}, \quad C_2 = v_{0y}. \tag{7}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, daß wir für die erste Gleichung (6) mit $v_{0\perp} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$

$$v_x(t) = v_{0\perp}\cos(\omega_z t - \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \varphi_0 = \operatorname{sign}(v_{0y})\arccos\left(\frac{v_{0x}}{v_{0\perp}}\right). \tag{8}$$

Für v_y können wir demnach schreiben

$$v_y(t) = -\frac{1}{\omega_Z}\dot{v}_x(t) = -v_{0\perp}\sin(\omega_Z t - \varphi_0). \tag{9}$$

Durch Integration von (8) und (9) nach der Zeit von 0 bis t erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{v_{0\perp}}{\omega_Z}\begin{pmatrix} \sin(\omega_Z t - \varphi_0) + \sin(\varphi_0) \\ \cos(\omega_Z t - \varphi_0) - \cos(\varphi_0) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Die Projektion der Bewegung auf die xy-Ebene ist also eine Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigeit im Uhrzeigersinn (für ein positiv geladenes Teilchen, also $q > 0$; für $q < 0$ wird $\omega_z < 0$, und das Teilchen läuft entgegen dem Uhrzeigersinn um).

Die z-Komponente ist eine freie Bewegung (vgl. die Bewegungsgleichung (2). Diese können wir nacheinander zweimal nach der Zeit integrieren. Dies ergibt

$$v_z(t) = v_{0z} = \text{const}, \quad z(t) = v_{0z}t + z_0. \tag{11}$$

I.a. ist also die Bewegung eine Schraubenlinie mit konstanter Ganghöhe pro Zeit v_{0z} und konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_Z. Für $v_{0z} = 0$ handelt es sich um eine Kreisbahn in der Ebene senkrecht zu $\vec{B}$.

Bemerkung: Diese Eigenschaften der Bewegung eines geladenen Teilchens in Magnetfeldern wird bei Teilchenbeschleunigern genutzt, um Teilchen auf eine Kreisbahn zu lenken. Daher rührt der Name Zyklotronfrequenz für ω_Z. Das Zyklotron war der erste Teilchenbeschleuniger überhaupt und wurde von Ernest Lawrenz 1929 erfunden (Nobelpreis für Physik 1939). Man beachte, daß wegen (10) der Radius der Kreisbahn durch den **Zyklotronradius** $r_Z = v_{0\perp}/\omega_Z = v_{0\perp}m/(qB)$ gegeben ist und ein Magnetfeld allein das Teilchen nicht beschleunigt, denn wie wir in Teilaufgabe (a) gezeigt haben, kann das Magnetfeld die kinetische Energie des Teilchens nicht erhöhen. Beim Zyklotron wird zur Beschleunigung des Teilchens ein elektrisches Feld verwendet, und das Teilchen durch ein Magnetfeld abgelenkt, wodurch dasselbe elektrische Feld zur Beschleunigung mehrfach verwendet werden kann, wobei letzteres immer zum richtigen Zeitpunkt umgepolt werden muß. Da die Zyklotronfrequenz nicht von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängt, ist entsprechend die Umlaufdauer $T_Z = 2\pi/\omega_Z$ konstant und man kann folglich die Frequenz des entsprechend benötigten Wechselstromes konstant bleiben[1]. Weitere Einzelheiten findet man in der Wikipedia gut erklärt:

`http://de.wikipedia.org/wiki/Zyklotronradius.`

(H22) Hyperbel (5 Punkte)

(a) Mit Hilfe des Cosinus-Satzes für das Dreieck F_1F_2P und den hier interessanten linken Ast der Hyperbel liest man unter Verwendung der geometrischen Definition der Hyperbel aus der Abbildung direkt die Gleichung

$$\sqrt{r^2 + 4e^2 - 4re\cos\varphi} - r = 2a \tag{12}$$

[1]Das gilt aufgrund relativistischer Effekte allerdings nicht für Teilchen, die sich mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen.

ab. Addieren von r und Quadrieren der entstehenden Gleichung liefert nach einigen einfachen Umformungen

$$r(\varphi) = \frac{k}{1+\epsilon\cos\varphi} \quad \text{mit} \quad k = \frac{b^2}{a} = \frac{e^2-a^2}{a}, \quad \epsilon = \frac{e}{a} > 1. \tag{13}$$

(b) Da für die Polarkoordinaten definitionsgemäß stets $r > 0$ sein muß, muß für den linken Ast $|\varphi| < \arccos(-1/\epsilon)$ sein, damit der Nenner in (13) positiv ist, wobei wir den generellen Definitionsbereich des Polar-Winkels hier willkürlich auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ festlegen. Für $\varphi \rightarrow \pm\arccos(-1/\epsilon)$ wird $r(\varphi) \rightarrow \infty$.

(c) Betrachten wir nun die Cartesischen Koordinaten des Punktes (x', y')-Koordinatensystem, wo der Ursprung in den „Mittelpunkt" der Hyperbel gelegt wurde. Wir beachten dabei, daß für den linken Ast der Hyperbel $x' < 0$ ist. Wir lesen damit aus der geometrischen Definition der Hyperbel

$$\sqrt{(-x'-e)^2+y'^2} - \sqrt{(-x'+e)^2+y'^2} = 2a \tag{14}$$

ab. Quadrieren dieser Gleichung liefert nach einigen Umformungen

$$\sqrt{[(x'-e)^2+y'^2][(x'+e)^2+y'^2]} = e^2+x'^2+y'^2-2a^2. \tag{15}$$

Abermaliges Quadrieren dieser Gleichung ergibt, wieder nach einigen einfachen Umformungen,

$$a^2(a^2-e^2) = (a^2-e^2)x'^2+y^2 \Rightarrow -a^2b^2 = y'^2-b^2x'^2. \tag{16}$$

Division durch $-a^2b^2$ liefert schließlich die auf dem Blatt angegebene Gleichung

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1. \tag{17}$$

Es ist klar, daß aus Symmetriegründen diese Gleichung beide Äste der Hyperbel beschreibt.

Bemerkung 1: Man liest noch ab, daß für $x', y' \gg a$ die 1 auf der rechten Seite der Hyperbelgleichung (17) verlässigt werden kann. Dann erhält man

$$\left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}\right)\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}\right) = 0. \tag{18}$$

Dies beschreibt aber die beiden Geraden

$$y' = \pm\frac{b}{a}x', \tag{19}$$

die sich an die Hyperbel in großen Entfernungen vom Mittelbpunkt $x' = y' = 0$ anschmiegen. Man nennt diese Geraden die **Asymptoten der Hyperbel**.

Bemerkung 2: Eine oft nützliche Parameterdarstellung für die Mittelpunktsform der Hyperbel folgt aus $\cosh^2\lambda - \sinh^2\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a\cosh\lambda \\ b\sinh\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

wobei man für das obere (untere) Vorzeichen den rechten (linken) Ast der Hyperbel erhält. Man prüft leicht nach, daß diese Koordinaten in der Tat die implizite Hyperbelgleichung (17) erfüllen.