Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2012/2013**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 7

Präsenzübungen

(P19) Energiedissipation

Für die Ableitung der Energie nach der Zeit gilt wegen der Kettenregel

$$\dot{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x})\right] = m\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}) = \dot{\vec{x}} \cdot \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_r\right) + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}). \tag{1}$$

Wegen $\vec{F}_1 = -\vec{\nabla} V$ folgt

$$\dot{E} = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{F}_r = -A(|\vec{v}|)\vec{v}^2. \tag{2}$$

Die Energie des Massepunktes nimmt also mit der Zeit ab, und zwar durch die Reibung mit der Materie in seiner Umgebung. Auf der rechten Seite von (2) steht nämlich gerade die Leistung, die die Reibungskräfte an dem Teilchen verrichten.

Bezieht man die Bewegung der Materie in der Umgebung mit ein, ist freilich die Gesamtenergie erhalten. Die Reibungsenergie äußert sich dabei in der entsprechenden Erwärmung der Materie, d.h. die Bewegungsenergie des Teilchens wird in die ungeordnete Wärmebewegung der Moleküle umgesetzt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem **dissipativen Prozeß** oder **Energiedissipation**.

(P20) Schwimmender Zylinder

Auf den Zylinder wirken die Schwerkraft $\vec{W} = -mg\vec{e}_3$ und die Auftriebskraft $\vec{B} = \sigma(V_0 - Az)g\vec{e}_3$. Dabei haben wir das Archimedische Prinzip verwendet, wonach die Auftriebskraft gerade so groß ist wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit. Wir haben dabei die Gleichgewichtslage gerade so gelegt, daß dann $z = 0$ ist. Es gilt also

$$\sigma V_0 g = mg \;\Rightarrow\; V_0 = \frac{m}{\sigma}. \tag{3}$$

Die Bewegungsgleichung für die Bewegung in die 3-Richtung lautet also

$$m\ddot{z} = B_3 + W_3 = g[\sigma(V_0 - Az) - m]\vec{e}_3 = -\sigma g A z. \tag{4}$$

Dies ist aber die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma g A}{m}}. \tag{5}$$

Die Schwingungsdauer ist also

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sigma g A}}. \tag{6}$$

(P21) Resonanzkatastrophe

Die Bewegungsgleichung lautet nach Division durch m

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos(\omega t). \tag{7}$$

Deren Lösung ergibt sich durch die Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{8}$$

und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.
Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet (s. Vorlesung)

$$x_{\text{hom}}(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t). \tag{9}$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz („ Variation der Konstanten")

$$x(t) = C(t) \sin(\omega t). \tag{10}$$

Dies in (7) eingesetzt liefert mit der Produktregel

$$2\omega \dot{C}(t) \cos(\omega t) + \ddot{C}(t) \sin(\omega t) \stackrel{!}{=} f_0 \cos(\omega t). \tag{11}$$

Durch Koeffizientenvergleich der linken und der rechten Seite erhält man zunächst

$$\ddot{C}(t) = 0 \Rightarrow C(t) = c_1 t + c_2 \tag{12}$$

und dann weiter

$$2\omega \dot{C}(t) = 2\omega c_1 \stackrel{!}{=} f_0 \Rightarrow c_1 = \frac{f_0}{2\omega}. \tag{13}$$

Da wir nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung benötigen, dürfen wir in (12) $c_2 = 0$ wählen. Es folgt also für die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{f_0}{2\omega} t \sin(\omega t). \tag{14}$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$x(0) = C_1 \stackrel{!}{=} x_0 \Rightarrow \dot{x}(0) = C_2 \omega \stackrel{!}{=} v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega}. \tag{15}$$

Es ist also

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{f_0}{2\omega} t \sin(\omega t). \tag{16}$$

Für hinreichend große t können wir die Lösung der homogenen Gleichung vernachlssigen, und wir haben

$$x(t) \underset{t \to \infty}{\cong} \frac{f_0}{2\omega} t \sin(\omega t). \tag{17}$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit linear ansteigender Amplitude. Dieses Phänomen kommt zustande, weil die anregende Kraft dieselbe Frequenz besitzt wie der frei schwingende Massenpunkt. Dadurch schaukelt sich die Amplitude immer mehr auf. Ähnliche Phänomene kennen wir auch im Alltag, z.B. beim Schaukeln. Es ist klar, daß für unseren Massenpunkt an einer Feder bei großer Amplitude das Hooksche Gesetz nicht mehr gelten wird und die Feder irgendwann zerreißt. In der Technik ist es daher sehr wichtig, bei schwingenden Systemen solche Eigenfrequenzen zu berücksichtigen und ggf. hinreichend stark abzudämpfen. Ein bekanntes Beispiel, wo dies versäumt wurde, ist die Tacoma-Brücke (bei Seattle, Washington):

`http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw`