Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 7

Hausübungen (Abgabe: 21.12.2012)

(H18) Schwingung auf einer Tautochrone (3 Punkte)

(a) Wir benötigen zunächst die Geschwindigkeit des Massenpunktes. Anwenden der Kettenregel ergibt

$$\dot{\vec{x}} = R\dot{\lambda} \begin{pmatrix} 1 + \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = 2R^2\dot{\lambda}^2(1+\cos\lambda) = 4R^2\dot{\lambda}^2\cos^2\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{1}$$

Die Gesamtenergie ist also

$$E = 2mR^2\dot{\lambda}^2\cos^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) + mgR(1-\cos\lambda) = 2mR^2\dot{\lambda}^2\cos^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 2mgR\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{2}$$

(b) Substituieren wir $u = \sin(\lambda/2)$, ergibt sich wegen

$$\dot{u} = \frac{\dot{\lambda}}{2}\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right) \tag{3}$$

schließlich die auf dem Aufgabenblatt angegebene Formel

$$E = 8mR^2\dot{u}^2 + 2mgRu^2. \tag{4}$$

(c) Nach dem Energieerhaltungssatz ist dieser Ausdruck konstant. Die Zeitableitung ist also

$$\dot{E} = 16mR^2\dot{u}\ddot{u} + 4mgRu\dot{u} = 0. \tag{5}$$

In Standardform gebracht, liefert dies die Bewegungsgleichung

$$\ddot{u} + \frac{g}{4R}u = 0. \tag{6}$$

(d) Dies ist die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz und Schwingungsdauer

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}. \tag{7}$$

(e) Für das Anfangswertproblem $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = 0$ lautet die Lösung (7) für $u = \sin(\lambda/2)$

$$u(t) = u_0\cos(\omega t). \tag{8}$$

Der Punkt $x = y = 0$ ist durch $\lambda = 0$ und also $u = 0$ gegeben. Unabhängig von der Amplitude u_0 der Schwingung ist $u(t_{\text{an}}) = 0$

$$\omega t_{\text{an}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{\text{an}} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{9}$$

(H19) Schwingung mit Reibung (4 Punkte)
Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu_g m g \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -kx \pm \mu_g m g\,,$$

$+$ für negative $\dot{x}$ und $-$ für positive $\dot{x}$. Die allgemeine Lösung ist trivial:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \pm \frac{\mu_g g}{\omega^2}$$

mit $\omega = \sqrt{k/m}$. Wegen $\dot{x}(t=0) = 0$ gilt $\dot{x}(t) = 0$ an $\omega t = l\pi$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, d.h. an jedem Zeitpunkt bei maximalen Dehnung bzw. Stauchung der Feder. Differenziert man $x(t)$ an $\omega t = l\pi$, erhält man $\dot{x}(l\pi/\omega) = \omega B = 0$, also $B = 0$. Es folgt

$$x(t) = A\cos\omega t \pm \frac{\mu_g g}{\omega^2}$$

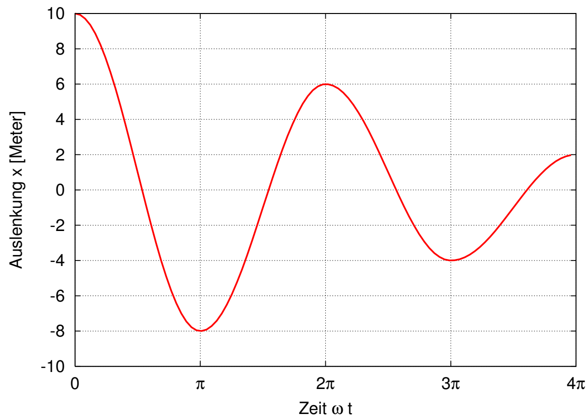
. Da $x(t=0) = x_0 > 0$, gilt dann $\dot{x}(t) < 0$ in Zeitintervallen $\omega t \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$ und $\dot{x}(t) > 0$ in Zeitintervallen $\omega t \in [(2n+1)\pi, 2(n+1)\pi]$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dann sind

$$\begin{aligned}
x(t) &= A\cos\omega t + \frac{\mu_g g}{\omega^2} \quad \text{für} \quad \omega t \in [2n\pi, (2n+1)\pi], \\
x(t) &= A\cos\omega t - \frac{\mu_g g}{\omega^2} \quad \text{für} \quad \omega t \in [(2n+1)\pi, 2(n+1)\pi]\,.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left(x(\omega t = 2n\pi) - \frac{\mu_g g}{\omega^2}\right)\cos\omega t + \frac{\mu_g g}{\omega^2} \quad \text{für} \quad \omega t \in [2n\pi, (2n+1)\pi], \\
x(t) &= -\left(x(\omega t = (2n+1)\pi) + \frac{\mu_g g}{\omega^2}\right)\cos\omega t - \frac{\mu_g g}{\omega^2} \quad \text{für} \quad \omega t \in [(2n-1)\pi, 2n\pi].
\end{aligned}$$

mit $x(\omega t = 0) = x_0$. Man erkennt, daß $x(\omega t = \pi) = -(x_0 - 2\mu_g g/\omega^2)$, $x(\omega t = 2\pi) = x_0 - 4\mu_g g/\omega^2$, usw. Im allgemeinen gilt $|x(\omega t = l\pi)| = x_0 - 2l\mu_g g/\omega^2 = x_0 - (2\mu_g g/\omega\pi)t$.



Man sieht, daß die Amplitude der Schwingung linear mit der Zeit kleiner wird, was auf die Dämpfung durch die Reibung zurückzuführen ist. Die Masse bleibt stehen, wenn für $\dot{x}=0$ die Federkraft kleiner wird als die Haftreibungskraft, d.h. also für $k|x(\omega t = l\pi)| < \mu_h m g$, d.h. zu Zeiten $\omega t \geq l\pi$ mit

$$l \geq \frac{x_0 - \mu_h g/\omega^2}{2\mu_g g/\omega^2} = \frac{10-2}{2} = 4\,.$$

Man kann die Energiedissipation durch die Reibung über die Energiebilanz sehen. Beispielsweise verliert die Masse zwischen den Zeiten $\omega t : 0 \to \pi$ die Energie

$$\frac{1}{2}k x_0^2 - \frac{1}{2}k[x(\omega t = \pi)]^2 = \frac{1}{2}k x_0^2 - \frac{1}{2}k(x_0 - 2\mu_g g/\omega^2)^2 = 2\mu_g m g(x_0 - \mu_g g/\omega^2)\,,$$

was exakt die Arbeit ist, die die Reibungskraft an dem Massepunkt verrichtet:

$$-\int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi} \mu_g m g\, dx = 2\mu_g m g(x_0 - \mu_g g/\omega^2)\,.$$

(H20) Alternativer Zugang zur Resonanzkatastrophe (3 Punkte)

Die Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos\alpha t \tag{10}$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] + f_0[\bar{A}\cos(\alpha t) + \bar{B}\sin(\alpha t)]\,, \tag{11}$$

wobei

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \tag{12}$$

$$\bar{A} = -\frac{\alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}\,, \tag{13}$$

$$\bar{B} = \frac{2\gamma\alpha}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}\,. \tag{14}$$

Für $\alpha = \omega$ haben wir $\bar{A} = 0$ und $\bar{B} = 1/(2\gamma\omega)$.

A und B sind Integrationskonstanten der homogenen Differentialgleichung, die durch die Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$ zu bestimmen sind. Wir erhalten (wieder für den Fall $\alpha = \omega$) $A = x_0$ und $B = (v_0 + \gamma x_0)/\Omega - f_0/(2\gamma\Omega)$. Die Lösung des Anfangswertproblems für diesen Fall lautet also

$$\begin{aligned} x(t) = &\frac{f_0}{2\gamma}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{\exp(-\gamma t)\sin(\Omega t)}{\Omega}\right] \\ &+ \exp(-\gamma t)\left[x_0\cos(\Omega t) + \frac{x_0\gamma + v_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Um den ungedämpften Fall zu erhalten, müssen wir den Limes $\gamma \to 0$ bilden. Dabei gilt wegen (12) $\Omega \to \omega$, und wegen der Stetigkeit der Exponential- und trigonometrischen Funktionen gilt für den Term in der zweiten Zeile

$$\lim_{\gamma\to 0} \exp(-\gamma t) \left[x_0 \cos(\Omega t) + \frac{x_0\gamma + v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \right] = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \tag{16}$$

Um den Limes für den Term in der ersten Zeile zu berechnen, entwickeln wir den Ausdruck in der eckigen Klammer nach einer Potenzreihe in γ. Dabei genügt die Entwicklung bis zur ersten Ordnung. Allgemein gilt nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$f(\gamma) = f(0) + \gamma f'(0) + \mathcal{O}(\gamma^2). \tag{17}$$

Mit

$$f(\gamma) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{\exp(-\gamma t)\sin(\Omega t)}{\Omega} \tag{18}$$

folgt

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{t \sin(\omega t)}{\omega} + \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\gamma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega} \left(\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \right) \bigg|_{\gamma=0} = \frac{t \sin(\omega t)}{\omega}. \tag{19}$$

Setzen wir mit diesem Ergebnis die Taylor-Entwicklung (17) von(18) ein und das Resultat in die obere Zeile von (15), erhalten wir schließlich für den gesuchten Limes $\gamma \to 0$

$$x(t) = \frac{f_0 t \sin(\omega t)}{2\omega} + x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \tag{20}$$

Dies ist aber in der Tat identisch zu der direkten Lösung des Problems (vgl. Lösung zu Aufgabe (P21)).