Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees | Wintersemester 2012/2013

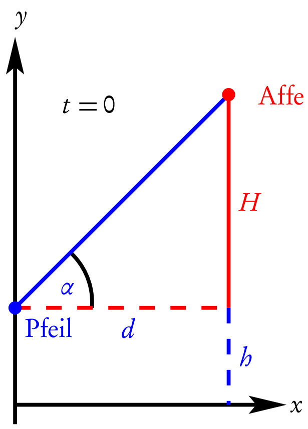
Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 6

Hausübungen (Abgabe: 14.12.2012)

(H14) Arbeit eines Kraftfeldes (2 Punkte)

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= (6\mathrm{m/s^2}\cdot t - 2\mathrm{m/s}, 3\mathrm{m/s^3}\cdot t^2, -4\mathrm{m/s^4}\cdot t^3), \qquad \ddot{\vec{r}} = (6\mathrm{m/s^2}, 6\mathrm{m/s^3}\cdot t, -12\mathrm{m^2/s^4}\cdot t^2) \\
\vec{F} &= m\ddot{\vec{r}} \\
W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\; m \left(36\mathrm{m^2/s^4}\cdot t - 12\mathrm{m/s^3} + 18\mathrm{m^2/s^6}\cdot t^3 + 48\mathrm{m^2/s^8}\cdot t^5\right) \\
&= 2454\,\mathrm{Nm} = 2454\,\mathrm{J}.
\end{aligned}$$

(H15) Affe am Baum (2 Punkte)



Aus der Skizze entnehmen wir aus dem rechtwinkligen Dreieck

$$\cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+H^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{d^2+H^2}}, \tag{1}$$

daß die Anfangsbedingungen für die Bewegung des Pfeils und des Affen durch

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\mathrm{P}0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{\mathrm{P}0} = v_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{v_0}{\sqrt{d^2+H^2}} \begin{pmatrix} d \\ H \end{pmatrix}, \\
\vec{r}_{\mathrm{A}0} &= \begin{pmatrix} d \\ h+H \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{\mathrm{A}0} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

gegeben sind. Auf den Pfeil und den Affen wirkt stets die jeweilige Schwerkraft, so daß die Bewegungsgleichungen

$$m_{\mathrm{P}}\ddot{\vec{r}}_{\mathrm{P}} = -m_{\mathrm{P}} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad m_{\mathrm{A}}\ddot{\vec{r}}_{\mathrm{A}} = -m_{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \tag{3}$$

lauten. Die Lösungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen findet man wieder durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\mathrm{P}}(t) &= \frac{\vec{g}}{2}t^2 + \vec{v}_{\mathrm{P}0}t + \vec{r}_{\mathrm{P}0} = -\frac{g}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{v_0 t}{\sqrt{d^2+H^2}} \begin{pmatrix} d \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \\
\vec{r}_{\mathrm{A}}(t) &= \frac{\vec{g}}{2}t^2 + \vec{r}_{\mathrm{A}0} = -\frac{g}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ H+h \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Um herauszufinden, ob ein Schnittpunkt existiert, müssen wir zeigen, daß diese beiden Ortsvektoren für einen Zeitpunkt t_{end} gleich werden. Dies ist in der Tat der Fall für

$$\frac{v_0 t_{\mathrm{end}}}{\sqrt{d^2+H^2}} = 1 \Rightarrow t_{\mathrm{end}} = \frac{\sqrt{d^2+H^2}}{v_0}, \tag{5}$$

falls der Pfeil nicht schon vor diesem Zeitpunkt den Boden getroffen hat.

(a) Damit der Pfeil den Affen trifft und nicht zuvor auf dem Boden auftrifft, muß

$$y_P(t_{\text{end}}) = y_A(t_{\text{end}}) = H + h - \frac{g}{2} t_{\text{end}}^2 = H + h - \frac{g}{2} \frac{d^2 + H^2}{v_0^2} > 0 \tag{6}$$

gelten. Nach einigen Umformungen erhalten wir

$$v_0 > \sqrt{\frac{g(d^2 + H^2)}{2(H + h)}}. \tag{7}$$

Also ist

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{g(d^2 + H^2)}{2(H + h)}}. \tag{8}$$

(b) In dem Fall trifft der Pfeil den Affen zur Zeit t_{end} (vgl. (5)).

(c) Die Höhe über dem Boden, bei der der Affe getroffen wird, ist

$$y_P(t_{\text{end}}) = y_A(t_{\text{end}}) = H + h - \frac{g}{2} t_{\text{end}}^2 = H + h - \frac{g}{2} \frac{d^2 + H^2}{v_0^2}. \tag{9}$$

(H16) Teilchen auf einer Kugel (3 Punkte)

Auf das Teilchen wirkt die Schwerkraft und die Reaktionskraft der Kugeloberfläche. Das Teilchen bewegt sich bei der gegebenen Anfangsbedingung auf einem Großkreis, den wir in die xz-Ebene eines Kugelkoordinatensystems legen. Das Teilchen verliert offenbar den Kontakt zur Kugeloberfläche, wenn die Komponente der Schwerkraft senkrecht zur Kugeloberfläche gleich groß wie die Zentripetalkraft wird, die es auf seiner Kreisbahn hält.

Für Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung gilt bei unserer Wahl der Koordinaten

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = R \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ 0 \\ -\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = R \begin{pmatrix} -\dot{\vartheta}^2 \sin\vartheta + \ddot{\vartheta}\cos\vartheta \\ 0 \\ -\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta - \ddot{\vartheta}\sin\vartheta \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Die Normalkomponente der Kraft auf das Teilchen, d.h. die Zentripetalkraft, ist wegen $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = -mR\dot{\vartheta}^2 = -\frac{m}{R}\dot{\vec{r}}^2. \tag{11}$$

Die Komponente der Schwerkraft in Normalenrichtung ist

$$\vec{F}_g \cdot \vec{n} = -mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = -mg\cos\vartheta. \tag{12}$$

Damit das Teilchen auf der Kugel bleibt, muß der Betrag dieser Kraftkomponente größer sein als der Betrag der Zentripetalkraft, d.h. es muß

$$\frac{m}{R}\dot{\vec{r}}^2 \leq mg\cos\vartheta. \tag{13}$$

Wir benötigen nun noch eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit des Teilchens und dem Winkel ϑ. Diesen erhalten wir aus dem Energiesatz. Zur Zeit $t = 0$ ist $\vec{r} = (0, 0, R)$ und $\dot{\vec{r}} = 0$. Verwenden wir als Potential für die Schwerkraft $V = mgz$, erhalten wir

$$E = mgR = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + mgR\cos\vartheta \;\Rightarrow\; m\dot{\vec{r}}^2 = 2mgR(1 - \cos\vartheta). \tag{14}$$

Setzen wir dies in (13) ein, erhalten wir

$$2mg(1 - \cos\vartheta) \leq mg\cos\vartheta \;\Rightarrow\; \cos\vartheta \geq \frac{2}{3}. \tag{15}$$

Das Teilchen hebt also von der Kugel bei dem Winkel ϑ_0 ab, für den

$$\cos\vartheta_0 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \vartheta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48{,}2°. \tag{16}$$

(H17) Seil über der Tischkante (3 Punkte)

(a) Die beschleunigte Masse ist stets die Gesamtmasse des Seiles m. Die wirksame Kraft ist aber nur $F = mgZ/L$. Wir haben also

$$m\ddot{Z} = \frac{mgZ}{L} \Rightarrow \ddot{Z} = \frac{g}{L}Z. \tag{17}$$

(b) Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie im Hinweis auf dem Blatt angegeben, lassen sich solche Gleichungen stets mit dem Ansatz

$$Z(t) = A\exp(\lambda t) \tag{18}$$

lösen. Setzen wir nämlich diesen Ansatz in (17) ein, erhalten wir

$$A\lambda^2 \exp(\lambda t) = \frac{g}{L} A\exp(\lambda t) \Rightarrow \lambda^2 = \frac{g}{L}. \tag{19}$$

Wir erhalten also zwei Lösungen für λ

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{20}$$

Der Ansatz (18) löst für beide Werte von λ die Gleichung. Da für irgendwelche Lösungen auch beliebige Linearkombinationen derselben wieder Lösungen sind (*warum?*), lautet eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$Z(t) = A_1\exp(\lambda_1 t) + A_2\exp(\lambda_2 t) = A_1\exp(\lambda_1 t) + A_2\exp(-\lambda_1 t). \tag{21}$$

Es ist für A_1, $A_2 \in \mathbb{R}$ auch die allgemeinste Lösungsschar, denn wir können aus gegebenen Anfangsbedingungen $Z(0) = Z_0$, $\dot{Z}(0) = v_0$ stets eindeutig A_1 und A_2 bestimmen. Es gilt nämlich

$$Z(0) = A_1 + A_2 \stackrel{!}{=} Z_0, \quad \dot{Z}(0) = \lambda_1(A_1 - A_2) \stackrel{!}{=} v_0. \tag{22}$$

Wir erhalten durch Auflösen des linearen Gleichungssystems

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(Z_0 + \frac{v_0}{\lambda_1}\right), \quad A_2 = \frac{1}{2}\left(Z_0 - \frac{v_0}{\lambda_1}\right). \tag{23}$$

Setzen wir dies in (21) ein und verwenden noch die Definition der Hyperbelfunktionen, erhalten wir das Resultat des Anfangswertproblems

$$Z(t) = Z_0\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + v_0\sqrt{\frac{L}{g}}\sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right). \tag{24}$$

Die Anfangswerte für die Aufgabe sollen nun $Z(0) = Z_0$ und $\dot{Z}(0) = v_0 = 0$ sein, d.h. in diesem Fall gilt

$$Z(t) = Z_0\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right). \tag{25}$$

Das Seilende rutscht über die Kante für $t = t_{\text{end}}$, wenn

$$Z(t_{\text{end}}) = Z_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t_{\text{end}}\right) \stackrel{!}{=} L \tag{26}$$

ist. Für die Geschwindigkeit in diesem Punkt folgt

$$\dot{Z}(t_{\text{end}}) = \sqrt{\frac{g}{L}} Z_0 \sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t_{\text{end}}\right) = \sqrt{\frac{g}{L}} Z_0 \sqrt{\cosh^2\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t_{\text{end}}\right) - 1}. \tag{27}$$

Wegen (26) ist aber

$$\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t_{\text{end}}\right) = \frac{L}{Z_0}, \tag{28}$$

und das ergibt schließlich

$$\dot{Z}(t_{\text{end}}) = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - Z_0^2)}. \tag{29}$$