Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 5

Präsenzübungen

(P14) Konstruktiver Beweis für Poincaré-Lemma (lokale Version)

Für $\vec{x} \in Q$ liegt der beschriebene Weg stets ganz im Definitionsbereich des Vektorfeldes $\vec{A}$, und dieses ist dort stetig und die Komponenten stetig partiell nach x, y und z differenzierbar.

(a) Das Linienintegral entlang des beschriebenen Weges $C = C_1 + C_2 + C_3$ ist durch

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' A_1(x', y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y' A_2(x, y', z_0) + \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' A_3(x, y, z') \tag{1}$$

gegeben.

(b) Da $\vec{A}(\vec{x})$ voraussetzungsgemäß stetig ist und in der Umgebung des Weges stetig partiell differenzierbar ist, gilt für die partiellen Ableitungen von $\Phi(\vec{x})$

$$\partial_x \Phi(\vec{x}) = A_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y' \partial_x A_2(x, y', z_0) + \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' \partial_x A_3(x, y, z'), \tag{2}$$

$$\partial_y \Phi(\vec{x}) = A_2(x, y, z_0) + \int_{x_0}^{z} \mathrm{d}z' \partial_y A_3(x, y, z'), \tag{3}$$

$$\partial_z \Phi(\vec{x}) = A_3(x, y, z). \tag{4}$$

Dabei haben wir für die Ableitung nach einer oberen Integrationsgrenze den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dessen Voraussetzungen wegen der Stetigkeitseigenschaften von $\vec{A}(\vec{x})$ und seiner partiellen Ableitungen erfüllt sind. Ebenso durften wir bei den Ableitungen nach einer Variablen, die in den Integranden als Parameter vorkommt, Integration und Differentiation vertauschen.

(c) Gemäß (4) ist $A_3(\vec{x}) = \partial_z \Phi(\vec{x})$ bereits gezeigt. Für die y-Komponente folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$, daß $\partial_y A_3(\vec{x}) = \partial_z A_2(\vec{x})$. Dies in das Integral in (3) eingesetzt, liefert dann aufgrund der Stetigkeit des Integranden und der daraus resultierenden Anwendbarkeit des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\partial_y \Phi(\vec{x}) = A_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z' \partial_{z'} A_2(x, y, z') = A_2(x, y, z_0) + A_2(x, y, z')\big|_{z'=z_0}^{z'=z} = A_2(x, y, z), \tag{5}$$

also die Behauptung für die y-Komponente.

Dieselben Argumente lassen sich nun auch auf (2) anwenden. Aus $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = 0$ folgt nämlich $\partial_x A_3(\vec{x}) = \partial_z A_1(\vec{x})$ und $\partial_x A_2(\vec{x}) = \partial_y A_1(\vec{x})$ und damit schließlich auch $\partial_x \Phi(\vec{x}) = A_1(\vec{x})$. Es ist also tatsächlich $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{x})$.

(d) Für das gegebene Vektorfeld gilt für das Wegintegral entlang des oben allgemein betrachteten Integrationsweges

$$\Phi(\vec{x}) = \int_0^x \mathrm{d}x' \cdot 0 + \int_0^y \mathrm{d}y'(x^2 + 2y') + \int_0^z \mathrm{d}z'(3xz'^2 - 2) = x^2 y + y^2 + xz^3 - 2z \tag{6}$$

in Übereinstimmung mit dem auf Blatt 4 (P13) auf andere Art gefundenen Ergebnis.

(P15) Längen- und Volumenelement in Zylinderkoordinaten

Wir fassen zunächst die benötigten Formeln für die Zylinderkoordinaten zusammen. Bzgl. der kartesischen Basis gilt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \rho > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Man beachte stets, daß die Zylinderkoordinaten **entlang der z-Achse singulär** sind!

Für die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien und die entsprechenden normierten Vektoren folgt

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_\rho = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} \right| = 1 \Rightarrow \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \rho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| = \rho \Rightarrow \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_z = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} \right| = 1 \Rightarrow \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Wir bemerken, daß $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ in dieser Reihenfolge in jedem Punkt des Definitionsbereichs der Zylinderkoordinaten eine rechtshändige Orthonormalbasis bilden, d.h. daß

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \tag{11}$$

gilt. Weiter sind noch die Ableitungen der Einheitsvektoren nach den Koordinaten, ausgedrückt in der Basis der krummlinigen Koordinaten nützlich. Die von 0 verschiedenen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = e_\varphi, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -e_\rho. \tag{13}$$

(a) Für eine beliebige Trajektorie eines Teilchens $\vec{x}(t)$ gilt gemäß (7)

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \dot{\rho}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} + \dot{\varphi}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} + \dot{z}\frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z. \tag{14}$$

Dabei haben wir (8-10) verwendet.

Die Beschleunigung ergibt sich, indem man nochmals nach der Zeit ableitet. Dabei ist zu beachten, daß die Basisvektoren bzgl. der krummlinigen Orthonormalbasis selbst zeitabhängig sind:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}} &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}^2\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &\stackrel{(12,13)}{=} (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z.\end{aligned} \tag{15}$$

(b) Das Längenelement folgt sofort mit Hilfe von (14) zu

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{x}^2 = \vec{v}^2\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{16}$$

(c) Für die Spirale folgt $\mathrm{d}s^2 = (\rho_0^2 + h^2)\mathrm{d}\varphi^2$ und daher

$$l = \int_L \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sqrt{\rho_0^2 + h^2} = 2\pi\sqrt{\rho_0^2 + h^2}. \tag{17}$$

(d) Das Volumenelement ergibt sich aus der Jacobi-Determinante der Transformation von kartesischen zu Zylinderkoordinaten bzw. aus dem damit äquivalenten Spatprodukt aus den partiellen Ableitungen des Ortsvektors nach den Zylinderkoordinaten zu

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z\; h_\rho h_\varphi h_z = \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z\; \rho. \tag{18}$$

(e) Damit ergibt sich das Zylindervolumen zu

$$V = \int_V \mathrm{d}V = \int_0^R \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z\; \rho = \pi R^2 h, \tag{19}$$

wie man es aus der Elementargeometrie auch erwartet.