Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2012/2013**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 5

Hausübungen (Abgabe: 07.12.2012)

(H11) Längen- und Volumenelement in Kugelkoordinaten (3 Punkte)

Wir stellen zunächst die wichtigsten Formeln für Kugelkoordinaten zusammen. Für den Ortsvektor bzgl. kartesischer Koordinaten gilt

$$\vec{x} = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad r > 0, \quad \vartheta \in (0,\pi), \quad \varphi \in [0,2\pi). \tag{1}$$

Kugelkoordinaten sind entlang der gesamten z-Achse singulär.

Die Tangentialvektoren entlang der Koordinatenlinien, die Metrikkoeffizienten und die Einheitstangentialvektoren sind

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad h_r = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}\right| = 1, \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta} = r \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad h_\vartheta = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta}\right| = r, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = r\sin\vartheta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_\vartheta = \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta}\right| = r\sin\vartheta, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Man rechnet leicht nach, daß $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$ in dieser Reihenfolge in jedem Punkt ein rechtshändiges Orthonormalsystem bilden:

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi. \tag{5}$$

(a) Sei $\vec{x}(t)$ die Parametrisierung des Ortsvektors einer beliebigen Kurve. Dann gilt

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\vec{e}_\varphi. \tag{6}$$

Für das Längenelement erhalten wir

$$\mathrm{d}s^2 = \dot{\vec{x}}^2\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2. \tag{7}$$

(b) Das Volumenelement ist

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi\ h_r h_\vartheta h_\varphi = \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi\ r^2\sin\vartheta. \tag{8}$$

(c) Für die Kugel folgt

$$V = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x} = \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r^2\sin\vartheta = \frac{4\pi}{3}R^3, \tag{9}$$

wie aus der Elementargeometrie bekannt.

(H12) Umrechnung von Vektoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten (4 Punkte)

(a) Zylinderkoordinaten

- In kartesischen Koordinaten ist $\vec{u} = (0, 2\sqrt{3}, 2)$. Die zu berechnenden Vektorkomponenten beziehen sich auf die krummlinigen Orthonormalkoordinaten und werden daher *ortsabhängig*. Mit den Formeln vom Lösungsblatt zur Präsenzaufgabe (P15) ergibt sich

$$u_\rho(\vec{x}) = \vec{e}_\rho(\vec{x}) \cdot \vec{u} = 2\sqrt{3} \sin\varphi, \quad u_\varphi(\vec{x}) = \vec{e}_\varphi(\vec{x}) \cdot \vec{u} = 2\sqrt{3} \cos\varphi, \quad u_z(\vec{x}) = \vec{e}_z(\vec{x}) \cdot \vec{u} = 2. \tag{10}$$

- In kartesischen Koordinaten ist $\vec{v} = (y, 0, 2z) = (\rho \sin\varphi, 0, 2z)$. Für die Komponenten bzgl. der Orthonormalbasis gilt demnach

$$v_\rho(\vec{x}) = \vec{e}_\rho(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \rho \sin\varphi \cos\varphi, \quad v_\varphi(\vec{x}) = \vec{e}_\varphi(\vec{x}) \cdot \vec{v} = -\rho \sin^2\varphi, \quad v_z(\vec{x}) = \vec{e}_z \cdot \vec{v} = 2z. \tag{11}$$

(b) Kugelkoordinaten

- In kartesischen Koordinaten ist $\vec{u} = (0, 2\sqrt{3}, 2)$. Mit (1-4) folgt

$$\begin{aligned} u_r(\vec{x}) &= \vec{e}_r(\vec{x}) \cdot \vec{u} = 2\sqrt{3} \sin\varphi \sin\vartheta + 2\cos\vartheta, \\ u_\vartheta(\vec{x}) &= \vec{e}_\vartheta(\vec{x}) \cdot \vec{u} = 2\sqrt{3} \sin\varphi \cos\vartheta - 2\sin\vartheta, \\ u_\varphi(\vec{x}) &= 2\sqrt{3} \cos\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

- In kartesischen Koordinaten ist $\vec{v} = (y, 0, 2z) = (r \sin\varphi \sin\vartheta, 0, 2r \cos\vartheta)$. Für die Komponenten der krummlinigen Orthonormalbasis folgt

$$\begin{aligned} v_r(\vec{x}) &= \vec{e}_r(\vec{x}) \cdot \vec{v} = r \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\vartheta + 2r \cos^2\vartheta, \\ v_\vartheta(\vec{x}) &= \vec{e}_\vartheta(\vec{x}) \cdot \vec{v} = r \sin\varphi \cos\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta - 2r \sin\vartheta \cos\vartheta, \\ v_\varphi(\vec{x}) &= \vec{e}_\varphi(\vec{x}) \cdot \vec{v} = -r \sin^2\varphi \sin\vartheta. \end{aligned} \tag{13}$$

(H13) Schiefe Ebene (3 Punkte)

Auf das Teilchen wirken zwei Kräfte: die Gewichtskraft $\vec{F}_s$ und die Reaktionskraft $\vec{F}_R$. $\vec{F}_R$ zeigt in die Richtung senkrecht zur schiefen Ebene und $F_R = F_s \cos\alpha$, was aus der Tatsache folgt, dass keine Bewegung in der Richtung senkrecht zur schiefen Ebene erfolgt. In der Richtung parallel zur schiefen Ebene, $\vec{e}$, lautet die Bewegungsgleichung $m\ddot{s}(t) = F_s \sin\alpha = mg \sin\alpha$. Es folgt $\ddot{s}(t) = g \sin\alpha$. Durch Integration über t bekommt man

$$v(t) = \dot{s}(t) = t g \sin\alpha + c_1, \quad \text{und} \quad s(t) = \frac{1}{2} t^2 g \sin\alpha + t c_1 + c_2,$$

wobei c_1 und c_2 Integrationskonstanten sind, die durch die Anfangsbedingungen $v(t = 0) = 0$, $s(t = 0) = 0$ bestimmt werden können. Es ergibt sich $c_1 = c_2 = 0$.