Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2012/2013**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 3

Präsenzübungen

(P8) Schraubenlinie

(a) In der Skizze auf dem Blatt ist $b > 0$ und die Kurve bildet eine Rechtsschraube, d.h. richtet man die Finger der rechten Hand in Richtung der Windungen, zeigt der Daumen in die Richtung der z-Komponente des Geschwindigkeitsvektors. Für $b < 0$ hat man eine Linksschraube.

(b) $\vec{v}(t) = (-R\omega \sin\omega t, R\omega\cos\omega t, b\omega)$ und $|\vec{v}(t)| = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \omega\sqrt{R^2+b^2}$.

(c) $\vec{a}(t) = (-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2 \sin\omega t, 0)$ und $|\vec{a}(t)| = \omega^2 R$.

(d) $s(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \, |\vec{v}(t')| = \omega\sqrt{R^2+b^2}\, t$.

(e) Aus den Definitionen des Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormaleneinheitsvektors ergibt sich

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-R\sin\omega t, R\cos\omega t, b)}{\sqrt{R^2+b^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{ds} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}/dt}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{-R\omega(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)}{\omega(R^2+b^2)} \Rightarrow \vec{N} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}/ds}{|\mathrm{d}\vec{T}/ds|} = (-\cos\omega t, -\sin\omega t, 0)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{(b\sin\omega t, -b\cos\omega t, R)}{\sqrt{R^2+b^2}}$$

(f) Aus der Definition des Krümmungsradius folgt

$$\rho = \frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{|\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}s|} = \frac{R^2+b^2}{R}$$

und für den Torsionsradius

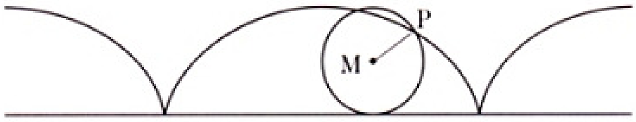
$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{b(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)}{R^2+b^2} \quad \Rightarrow \text{Torsionsradius} \quad \frac{1}{\chi} = \frac{1}{|\mathrm{d}\vec{B}/\mathrm{d}s|} = \frac{R^2+b^2}{b}$$

(P9) Zykloide

(a) Aus der Abbildung auf dem Arbeitsblatt kann man entnehmen:

$$\phi(t) = \omega t, \quad r(t) = R\phi = R\omega t,$$
$$x(t) = r - R\sin\phi = R(\omega t - \sin\omega t),$$
$$y(t) = R - R\cos\phi = R(1-\cos\omega t).$$

(b) Daraus folgt $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R\omega(1-\cos\omega t, \sin\omega t)$ und $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = R\omega^2(\sin\omega t, \cos\omega t)$



(P10) Linienintegral

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= (3x^2 - 6yz,\, 2y + 3xz,\, 1 - 4xyz^2) \\ &= (3t^2 - 6t^5,\, 2t^2 + 3t^4,\, 1 - 4t^9), \\ \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} &= (1, 2t, 3t^2)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{t=2} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^2 \vec{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left[3t^2 - 6t^5 + (2t^2 + 3t^4)2t + (1 - 4t^9)3t^2\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 (6t^2 + 4t^3 - 12t^{11})\,\mathrm{d}t = -4064.\end{aligned}$$