Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2012/2013**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 2

Präsenzübungen

(P5) Vektorprodukt

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{c} = (-1, -1, 3)$. Wir berechnen die gefragten Vektorprodukte aus der Definition des Kreuzproduktes

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(b) Es gilt $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab|\sin[\angle(\vec{a}, \vec{b})]|$. Dabei ist $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{6}$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{30}$. Daraus folgt $|\sin[\angle(\vec{a}, \vec{b})]| = 1$. In dem Fall ist also eindeutig $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$.

Bemerkung: Im allgemeinen kann man aus dem Vektorprodukt den Winkel zwischen zwei Vektoren aus dem Vektorprodukt *nicht* eindeutig bestimmen, weil man nur den Betrag des Sinus' bestimmen kann.

Über das **Skalarprodukt** ist hingegen der Winkel immer eindeutig bestimmt:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}\right) \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Der Winkel ist natürlich nur dann wohldefiniert, wenn $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$. In unserem Fall ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, woraus sofort wieder $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$ folgt.

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(d) $\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (-3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, was mit dem Ergebnis von (c) übereinstimmt.

(e) Wir führen die Rechnung in Komponenten einfach aus

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(\vec{a}\cdot\vec{c} - a_1c_1) - c_1(\vec{a}\cdot\vec{b} - a_1b_1) \\ b_2(\vec{a}\cdot\vec{c} - a_2c_2) - c_2(\vec{a}\cdot\vec{b} - a_2b_2) \\ b_3(\vec{a}\cdot\vec{c} - a_3c_3) - c_3(\vec{a}\cdot\vec{b} - a_3b_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_1(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ b_2(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ b_3(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_3(\vec{a}\cdot\vec{b}) \end{pmatrix} \\
&= \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).
\end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

Bemerkung 1: Man kann sich die Regel für das doppelte Kreuzprodukt auch so merken: Es stehen immer die in den Klammern befindlichen Vektoren außen, und zwar der mittlere Faktor zuerst. Die jeweils anderen Vektoren stehen im Skalarprodukt, und die beiden Terme sind voneinander zu subtrahieren.

Bemerkung 2: Diese Merkregel gilt auch für den alternativen Fall, wenn die beiden ersten Vektoren zuerst multipliziert werden:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}). \tag{3}$$

Das Vektorprodukt ist also **nicht assoziativ!**

Bemerkung 3: Für das Vektorprodukt gilt die **Jacobi-Identität**

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0. \tag{4}$$

Das zeigt man durch zyklische Vertauschung der Vektoren auf beiden Seiten der „bac-cab-Regel“ (2) und Addition der entstehen Gleichungen. Durch das Vektorprodukt wird der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zu einer sogenannten **Lie-Algebra** erweitert.

(P6) Kronecker-Symbol

(a) $\sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

(b) $\sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{i1} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \delta_{i1} = a_1 b_1$.

(c) $\sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j c_k \delta_{jk} \delta_{i2} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j c_j \delta_{i2} = a_2 \vec{b} \cdot \vec{c}$.

(P7) Levi-Civita-Symbol

(a) Die gesuchte Summe $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$ kann offenbar nur dann von 0 verschieden sein, wenn $i \neq j$ und zugleich entweder $i = l$ und $j = m$ oder $i = m$ und $j = l$ ist. In beiden Fällen ist nur der Term in der Summe von 0 verschieden, für den der Summationsindex k verschieden von den beiden anderen Indizes ist. Im ersten Fall sind beide Levita-Civita-Symbole beide identisch ± 1, so daß die Summe $+1$ wird. Im zweiten Fall sind die beiden Levi-Civita-Symbole von entgegengesetztem Vorzeichen, und die Summe wird -1. Dies drückt man wie angegeben mit den Kronecker-Symbolen aus:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \tag{5}$$

(b) Wegen $\epsilon_{klm} = -\epsilon_{lkm} = \epsilon_{lmk}$ kann man (5) auch in der Form

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \tag{6}$$

schreiben. Setzen wir $m = j$ und summieren zusätzlich über j, folgt daraus

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = \delta_{il} \sum_{j=1}^{3} \delta_{jj} - \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \delta_{jl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}. \tag{7}$$

Setzt man in dieser Gleichung noch den Index $l = m$, erhält man die auf dem Übungsblatt angegebene Gleichung.
