Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 2

Hausübungen (Abgabe: 16.11.2012)

(H3) Levi-Civita-Symbol 2 (5 Punkte)

(a) Wir führen die Summe für jedes $j \in \{1,2,3\}$ aus. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} (\vec{a}\times\vec{b})_1 \\ (\vec{a}\times\vec{b})_2 \\ (\vec{a}\times\vec{b})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{123}a_2b_3 + \epsilon_{132}a_3b_2 \\ \epsilon_{231}a_3b_1 + \epsilon_{213}a_1b_3 \\ \epsilon_{312}a_1b_2 + \epsilon_{321}a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Das entspricht genau der Definition des Vektorprodukts mit den Komponenten des Vektors bzgl. kartesischer Koordinaten, und das war zu zeigen.

(b) Mit der obigen Darstellung in Komponentenschreibweise gilt

$$\begin{aligned}[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]_j &= \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \epsilon_{jkl}\epsilon_{lmn}a_k b_m c_n \\ &= \sum_{k,m,n=1}^{3} (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{mk})a_k b_m c_n \\ &= b_j(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_j(\vec{a}\cdot\vec{b}). \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die Formel aus Aufgabe P7 (b) und im zweiten Schritt die Eigenschaften des Kronecker-Symbols aus Aufgabe P6 verwendet.

(c) Für das **Spatprodukt** gilt

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \sum_{j=1}^{3}(\vec{a}\times\vec{b})_j c_j = \sum_{jkl=1}^{3} \epsilon_{jkl}a_k b_l c_j. \tag{3}$$

Dabei haben wir die Formel aus Aufgabenteil (a) verwendet. Wegen der vollständigen Antisymmetrie des Levi-Civita-Symbols können wir dafür auch

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \sum_{jkl=1}^{3} \epsilon_{klj}a_k b_l c_j = \sum_{k=1}^{3} a_k(\vec{b}\times\vec{c})_k = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) \tag{4}$$

schreiben, wobei wir zuerst wieder die Formel aus (a) und dann die Definition des Skalarprodukts benutzt haben, und das war zu zeigen.

(H4) Drehungen um eine vorgegebene Achse (5 Punkte)

(a) Zuerst berechnen wir zur Normierung den Betrag des Vektorprodukts

$$|\hat{x} \times \vec{n}|^2 = (\hat{x} \times \vec{n}) \cdot (\hat{x} \times \vec{n}) = [(\hat{x} \times \vec{n}) \times \hat{x}] \cdot \vec{n}. \tag{5}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Formel aus Aufgabe H3 (c) für das Spatprodukt verwendet. Für das Doppelvektorprodukt in der Klammer können wir die „bac-cab-Regel" aus P5 (d+e) verwenden, was auf

$$|\hat{x} \times \vec{n}|^2 = [\vec{n}\hat{x}^2 - \hat{x}(\hat{x} \cdot \vec{n})] \cdot \vec{n} = 1 - (\hat{x} \cdot \vec{n})^2. \tag{6}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar nur dann 0, wenn $\hat{x} \parallel \vec{n}$, und das ist voraussetzungsgemäß nicht der Fall. Es ist also

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{n} \times \hat{x}}{\sqrt{1-(\hat{x} \cdot \vec{n})^2}}. \tag{7}$$

Die erneute Anwendung der „bac-cab-Regel" liefert

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \frac{(\vec{n} \times \hat{x}) \times \vec{n}}{\sqrt{1-(\hat{x} \cdot \vec{n})^2}} = \frac{\hat{x} - (\vec{n} \cdot \hat{x})\vec{n}}{\sqrt{1-(\hat{x} \cdot \vec{n})^2}}. \tag{8}$$

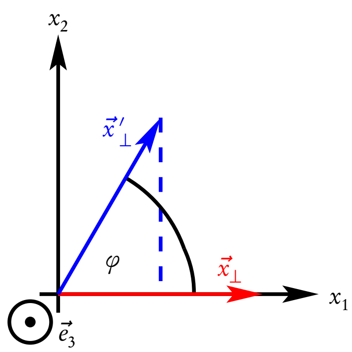
(b) Da die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ eine kartesische Basis bilden, sind wegen Aufgabe H1 (a) die Komponenten des Vektors durch die Skalarprodukte mit diesen Basisvektoren gegeben. Es gilt also

$$\begin{aligned}
x_1 &= \vec{e}_1 \cdot \vec{x} = \frac{r}{\sqrt{1-(\hat{x} \cdot \vec{n})^2}} [1-(\hat{x} \cdot \vec{n})^2] = r\sqrt{1-(\hat{x} \cdot \vec{n})^2}, \\
x_2 &= \vec{e}_2 \cdot \vec{x} = r\vec{e}_2 \cdot \hat{x} = 0, \\
x_3 &= \vec{e}_3 \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x} = r\vec{n} \cdot \hat{x}.
\end{aligned} \tag{9}$$

(c) Die Projektion des Vektors $\vec{x}$ auf die 12-Ebene ist gemäß (9) offenbar durch

$$\vec{x}_\perp = x_1 \vec{e}_1 \tag{10}$$

gegeben. In der Projektion auf die 12-Ebene sieht die Situation also wie folgt aus:



Die Orientierung der drei Basisvektoren in dieser Zeichnung ergibt sich daraus, daß die Basis konstruktionsgemäß eine rechtshändige Basis ist. Ebenso erfolgt definitionsgemäß die Drehung um die $\vec{n} = \vec{e}_3$-Achse im Sinne der Rechte-Hand-Regel, d.h. streckt man den Daumen der rechten Hand in die Richtung von $\vec{n}$ (in der Zeichnung also aus der Zeichenebene heraus, angedeutet durch den Kreis mit Punkt), geben die Finger die Drehrichtung an. Für die Komponenten von $\vec{x}'$ ergibt sich aus der Zeichnung sofort

$$x_1' = r_\perp \cos\varphi, \quad x_2' = r_\perp \sin\varphi, \quad x_3' = x_3 = r\vec{n} \cdot \hat{x} = \vec{n} \cdot \vec{x}. \tag{11}$$

Dabei ist

$$r_\perp = |\vec{x}_\perp| = |x_1| = r\sqrt{1 - (\hat{x} \cdot \vec{n})^2}. \tag{12}$$

(d) Daraus folgt schließlich nach einigen einfachen Umformungen

$$\vec{x}' = \sum_{j=1}^{3} x_j' \vec{e}_j = r_\perp(\vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi) + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) = (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} + \cos\varphi[\vec{n} \times (\vec{x} \times \vec{n})] + \sin\varphi(\vec{n} \times \vec{x}), \tag{13}$$

und das war zu zeigen.

Diese Formel gilt offenbar auch für den Fall, daß $\vec{x} \,||\, \vec{n}$, denn dann ist $\vec{n} \times \vec{x} = 0$, und folglich ergibt (13)

$$\vec{x}' = (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} = \vec{x}, \tag{14}$$

und das muß auch so sein, denn wenn $\vec{x} \,||\, \vec{n}$, ändert sich an dem Vektor durch Drehung um sich selbst nichts.

Bemerkung: Wir haben eben gezeigt, daß die Drehungen offenbar durch einen Drehwinkel $\varphi \in [0, \pi]$ und einen Einheitsvektor $\vec{n}$ eindeutig parametrisiert werden. Wir können dies zusammenfassen zu dem Vektor $\vec{\varphi} = \varphi\vec{n}$, und der liegt in der abgeschlossenen Kugel $|\vec{\varphi}| \leq \pi$. Allerdings ist für $\varphi = \pi$ die Drehachse nicht eindeutig bestimmt, denn offenbar führt eine Drehung um π um die Achse $-\vec{n}$ zum gleichen Resultat wie die Drehung um die Achse $\vec{n}$. Um die Drehung um π eindeutig zu machen, müssen wir also Punkte auf dem Rand der Kugel vom Radius π identifizieren. Dieses kaum vorstellbare geometrische Konstrukt ergibt eine interessante topologische Eigenschaft, die allerdings erst in der Quantentheorie interessant wird. Für die klassische Mechanik können wir diese Subtilitäten getrost ignorieren.