Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 8 (17.12.-21.12.2012)

Präsenzübungen

(P22) Rakete

Eine Rakete der Anfangsmasse m_0 stoße pro Zeitintervall die Gasmenge $\alpha = \mathrm{d}m_{\text{Gas}}/\mathrm{d}t = \text{const}$ aus. Die Geschwindigkeit des Gases relativ zur Rakete ist ebenfalls konstant v_{rel}. Geben Sie die Bewegungsgleichung der Rakete im konstanten Gravitationsfeld der Erde unter Vernachlässigung der Luftreibung an. Die Rakete starte zur Zeit $t = 0$ vom Boden aus senkrecht nach oben. Berechnen Sie Geschwindigkeit und Höhe über dem Boden. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie durch Anwendung des Impulserhaltungssatzes für den Fall ohne Gravitation,

$$\vec{p}_{\text{R}} + \vec{p}_{\text{G}} = \text{const},$$

daß aufgrund des Gasausstoßes auf die Rakete eine Kraft

$$\vec{F}_{\text{rück}} = -\alpha(v - v_{\text{rel}})\vec{e}_3 \tag{1}$$

wirkt.

(b) Die Bewegungsgleichung ergibt sich dann aus dem allgemeinen 2. Newtonschen Postulat

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{rück}} + \vec{F}_{\text{grav}}.$$

(c) Erläutern Sie, warum man hier *nicht* das vereinfachte Gesetz „$\vec{F} = m\vec{a}$“ anwenden darf.

(d) Schreiben Sie dann die Bewegungsgleichung als Funktion von v_{R} und $\dot{v}_{\text{R}}$ und lösen Sie diese Differentialgleichung durch Integration.

(e) Integrieren Sie das Resultat nochmals nach der Zeit, um die Position der Rakete als Funktion der Zeit zu erhalten.

(P23) Mathematisches Pendel (Kleinwinkelnäherung)

Ein Massenpunkt der Masse m hänge im homogenen Schwerefeld der Erde an einem Faden mit vernachlässigbarer Masse. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Auslenkwinkel aus der Gleichgewichtslage auf, indem Sie

(a) die wirkende Kraft $-mg\vec{e}_x$ geeignet zerlegen

(b) und durch Anwendung des Energiesatzes.

(c) Betrachten Sie dann den Fall kleiner Auslenkungen um die Ruhelage und berechnen Sie die entsprechende Schwingungsfrequenz der harmonischen Schwingungen in dieser Näherung.

Hinweis: Entwickeln Sie die Kraft bzw. die Energie als Funktion des Auslenkwinkels um die Ruhelage in eine Potenzreihe, wobei Sie die Reihenentwicklung jeweils bei der ersten bzw. zweiten Ordnung abbrechen.

Hausübungen (Abgabe: 18.01.2013)

(H21) Teilchen im Magnetfeld (5 Punkte)

Auf ein Teilchen der Masse m und der Ladung q wirkt in einem vorgegebenen Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$ die **Lorentz-Kraft** $\vec{F} = q\dot{\vec{x}} \times \vec{B}(\vec{x})$.

(a) Zeigen Sie, daß der Energiesatz gilt, wobei $E = E_{\text{kin}} = m\dot{\vec{x}}^2/2$. und erläutern Sie, warum das Magnetfeld keine Arbeit an dem Teilchen verrichtet.

(b) Betrachten Sie nun ein homogenes Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z = \text{const}$ und lösen Sie die Bewegungsgleichung für die allgemeine Anfangsbedingung $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ und $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Differentialgleichung erster Ordnung für $\vec{v}$. Dabei ist es bequem, für die Projektion der Bewegung in die xy-Ebene (senkrecht zum Magnetfeld) die Komponenten v_x und v_y zu der komplexen Größe $w = v_x + \mathrm{i}v_y$ zusammenzufassen und die Differentialgleichung für w zu betrachten. Deren allgemeine Lösung ergibt dann die Lösung für $v_x = \operatorname{Re} w$ und $v_y = \operatorname{Im} w$ (*warum?*). Die Lösung für v_z ist ebenfalls sehr einfach zu ermitteln. Integrieren Sie dann die gefundene Lösung für $\vec{v}$ nochmals nach t, um auch die Lösung für den Ortsvektor $\vec{x}$ zu erhalten.

(H22) Hyperbel (5 Punkte)

Wir betrachten die **Brennpunktsform** des linken Hyperbelastes in Polarkkoordinaten. Dabei lautet die Definition der Hyperbel: Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte P, für die der Betrag der Differenz der Abstände von zwei Brennpunkten F_1 und F_2 konstant $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 2a = \text{const}$ ist. Der Abstand der Brennpunkte sei $\overline{F_1F_2} = 2e$.

(a) Leiten Sie mit Hilfe der Skizze die Gleichung für den linken Ast der Hyperbel in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ her.

(b) Was ist der dazugehörige Definitionsbereich für φ?

(c) Leiten Sie weiter in Analogie zum in der Vorlesung behandelten Fall der Ellipse auch die **Mittelpunkts-form** der Hyperbel her (s. Skizze):

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Bemerkung: Diese Gleichung beschreibt die vollständige Hyperbel, also beide Äste, in impliziter Form!

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehungen $k = \frac{e^2-a^2}{a} = b^2/a$ (Halbparameter), $\epsilon = e/a > 1$ (numerische Exzentrizität) und $b = \sqrt{e^2 - a^2} \in \mathbb{R}$ (imaginäre Halbachse).