Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 5 (26.11.-30.11.2012)

Präsenzübungen

(P14) Konstruktiver Beweis für Poincaré-Lemma (lokale Version)

Wir betrachten ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{x})$, für das in einer offenen Umgebung eines Punktes $\vec{x}_0$ definiert sei. und für das dort

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_y A_3 - \partial_z A_2 \\ \partial_z A_1 - \partial_x A_3 \\ \partial_x A_2 - \partial_y A_1 \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

gilt. Wir setzen weiter voraus, daß die Komponenten von $\vec{A}(\vec{x})$ nach allen drei Koordinaten stetig partiell differenzierbar sind. Dann existiert ein Quader Q, der $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ im Inneren enthält, und wir können für jedes $\vec{x} = (x, y, z) \in Q$ das Kurvenintegral von $\vec{A}$ entlang der drei folgenden aus geraden, parallel zu den Koordinatenachsen verlaufenden Wegstücken zusammengesetzten Kurve berechnen:

$$C_1: \quad (x_0, y_0, z_0) \to (x, y_0, z_0), \quad C_2: \quad (x, y_0, z_0) \to (x, y, z_0), \quad C_3: \quad (x, y, z_0) \to (x, y, z).$$

(a) Drücken Sie das Wegintegral

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{C_1+C_2+C_3} \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

explizit durch die drei entsprechenden einfachen Integrale bzgl. x, y bzw. z aus.

(b) Berechnen Sie den Gradienten des so konstruierten Skalarfeldes $\Phi(\vec{x})$, indem Sie die partiellen Ableitungen ausführen.

(c) Zeigen Sie unter Anwendung von Gl. (1), daß

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) \tag{2}$$

gilt.

(d) Wenden Sie die Konstruktion des Skalarfeldes auf das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{x}) = (2xy + z^3, x^2 + 2y, 3xz^2 - 2)^t$$

aus Aufgabe (P13) an. Wählen Sie dazu $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)^t$.

(P15) Längen- und Volumenelement in Zylinderkoordinaten

Betrachten Sie die Standard-Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), die bzgl. kartesischer Koordinaten durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

definiert sind.

(a) Drücken Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung von Teilchen in Zylinderkoordinaten aus.

(b) Drücken Sie das Längenelement $\mathrm{d}s$, das durch $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ definiert ist, durch Zylinderkoordinaten aus.

(c) Berechnen Sie damit die Bogenlänge der Spirale $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $z = h\varphi$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$).

(d) Drücken Sie das bei $\vec{x}(r, \varphi, z)$ gelegene aus Zylinderkoordinatenlinien aufgepannte Volumenelement in Zylinderkoordinaten aus.

(e) Berechnen Sie damit das Volumen des Zylinders $\rho \leq R$, $0 \leq z \leq h$.

Hausübungen (Abgabe: 07.12.2012)

(H11) Längen- und Volumenelement in Kugelkoordinaten (3 Punkte)

Betrachten Sie die Standard-Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ), die bzgl. kartesischer Koordinaten durch

$$\vec{x} = (x, y, z)^t = (r \cos\varphi \sin\vartheta, r \sin\varphi \sin\vartheta, r \cos\vartheta)^t$$

definiert sind.

(a) Drücken Sie das Längenelement $\mathrm{d}s$, das durch $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ definiert ist, durch Kugelkoordinaten aus.

(b) Zeigen Sie, daß das bei $\vec{x}(r, \varphi, \vartheta)$ gelegene von den Kugelkoordinatenlinien aufgespannte Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\vartheta$.

(c) Berechnen Sie mit damit das Volumen der Kugel $r \leq R$.

H12) Umrechnung von Vektorfeldern in Zylinder- und Kugelkoordinaten (4 Punkte)

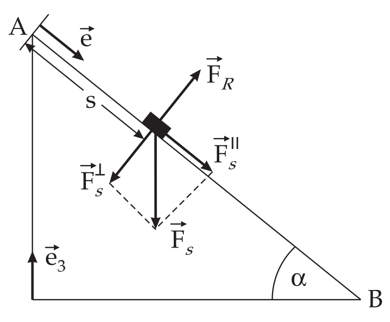
Drücken Sie die folgenden bzgl. einer kartesischen Basis gegebenen Vektorfelder

$$\vec{u}(\vec{x}) = 2\sqrt{3}\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \quad \text{und} \quad \vec{v}(\vec{x}) = y\vec{e}_x + 2z\vec{e}_z$$

(a) in Zylinderkoordinaten und (b) in Kugelkoordinaten aus, d.h. bringen Sie diese Vektorfelder $\vec{A}(\vec{x}) = A_x(x, y, z)\vec{e}_x + A_y(x, y, z)\vec{e}_y + A_z(x, y, z)\vec{e}_z$ in die Form

$$\vec{A}(\vec{x}) = A_\rho(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z \quad \text{bzw.} \quad \vec{A} = A_r(r, \vartheta, \varphi)\vec{e}_r + A_\varphi(r, \vartheta, \varphi)\vec{e}_\varphi + A_\theta(r, \vartheta, \varphi)\vec{e}_\theta.$$

(H13) Schiefe Ebene (3 Punkte)



Ein Teilchen P der Masse m rutscht unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungslos entlang einer schiefen Ebene AB, die unter einem Winkel α zur Horizontalen geneigt ist (vgl. Abb.). Das ruhende Teilchen wird zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt A losgelassen. Finden Sie die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit.