Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 2 (05.11.-09.11.2012)

Präsenzübungen

(P5) Vektorprodukt

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=(1,2,0)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, $\vec{c}=(-1,-1,3)$.

(a) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{b}\times\vec{a}$.

(b) Berechnen Sie mittels der Definition des Vektorproduktes den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechnen Sie zur Probe ebenfalls den Winkel mittels des Skalarproduktes.

(c) Berechnen Sie den Vektor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

(d) Zeigen Sie durch Berechnung der beiden Seiten, daß die Beziehung

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$

die sog. “bac-cab-Regel”, erfüllt ist.

(e) Beweisen Sie die Beziehung in (d) für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

(P6) Kronecker-Symbol

Die Indizes i,j und k können jeweils die Werte 1,2 oder 3 annehmen. Das Kronecker-Symbol ist definiert als

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{falls} \quad i=j,\\ 0 & \text{falls} \quad i\neq j.\end{cases}$$

Vereinfachen Sie, soweit wie möglich, folgende Ausdrücke:

(a) $\sum_{i,j=1}^{3}(a_i b_j \delta_{ij})$, (b) $\sum_{i,j=1}^{3}(a_i b_j \delta_{i1}\delta_{ij})$, (c) $\sum_{i,j,k=1}^{3}(a_i b_j c_k \delta_{i2}\delta_{jk})$

(P7) Levi-Civita-Symbol 1

Im folgenden können alle Indizes jeweils die Werte 1, 2 oder 3 annehmen. Das Levi-Civita-Symbol ist definiert als

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{falls} \quad (i,j,k) \quad \text{gerade Permutation von} \quad (1,2,3),\\ -1 & \text{falls} \quad (i,j,k) \quad \text{ungerade Permutation von} \quad (1,2,3),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dazu äquivalent ist die Definition, daß $\epsilon_{123}=1$ ist und ansonsten ϵ_{ijk} total antisymmetrisch unter Indexvertauschungen ist. Zeigen Sie (durch Nachdenken oder explizit), daß die folgenden Formeln gelten:

(a) $\sum_{k=1}^{3}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm})=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$, (b) $\sum_{j,k=1}^{3}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk})=2\delta_{im}$.

Bitte wenden!

Hausübungen (Abgabe: 16.11.2012)

(H3) Levi-Civita-Symbol 2 (5 Punkte)
Zeigen Sie folgende Anwendungen des in (P7) eingeführten Levi-Civita-Symbols.

(a) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beliebige $\mathbb{R}^3$-Vektoren mit Komponenten a_i und b_i ($i \in \{1,2,3\}$) bzgl. einer kartesischen Basis. Zeigen Sie, daß die Komponenten des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ durch

$$(\vec{a} \times \vec{b})_j = \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{jkl} a_k b_l$$

gegeben sind.

(b) Zeigen Sie die „bac-cab-Regel“ aus Aufgabe P5 (d+e) mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols. **Hinweis:** Die Ergebnisse von Aufgabe P7 dürfen verwendet werden!

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols, daß für beliebige drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

gilt.

(H4) Drehungen um eine vorgegebene Achse (5 Punkte)
Zeigen Sie, daß durch

$$\vec{x}\,' = \hat{D}_{\vec{n}}(\varphi)\vec{x} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) + \vec{n} \times (\vec{x} \times \vec{n}) \cos\varphi + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin\varphi \tag{1}$$

eine Drehung des Vektors $\vec{x}$ um die Drehachse in Richtung von $\vec{n}$ um den Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ im Sinne der Rechte-Hand-Regel gegeben ist.
Anleitung: Im folgenden sei $\hat{x} = \vec{x}/r$ mit $r = |\vec{x}|$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{x}$. Falls $\vec{n} \parallel \hat{x}$ ist die Formel sicher korrekt (warum?). Sei also $\vec{n} \times \hat{x} \neq 0$. Dann beschreiben wir die Drehung am besten in dem folgenden an $\vec{x}$ angepaßten kartesischen rechtshändigen Koordinatensystem $\vec{e}_3 = \vec{n}$, $\vec{e}_2 = \vec{n} \times \hat{x}/|\hat{x} \times \vec{n}|$, $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$

(a) Drücken Sie $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ so einfach wie möglich mit Hilfe von $\vec{n}$ und $\hat{x}$ aus.

(b) Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{x}$ bzgl. des kartesischen Koordinatensystems $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(c) Bzgl. dieses Koordinatensystems handelt es sich offenbar um eine Drehung um die 3-Achse. Was sind demnach die Komponenten von $\vec{x}\,'$ bzgl. dieses Koordinatensystems? **Hinweis:** Zeichen Sie die Projektion $\vec{x}_\perp$ von $\vec{x}$ und $\vec{x}\,'_\perp$ von $\vec{x}\,'$ auf die 12-Ebene in das oben konstruierte kartesische Koordinatensystem ein und lesen Sie die Komponenten x_1' und x_2' des gedrehten Vektors ab. Beachten Sie weiter, daß offenbar $x_3' = x_3$ gilt.

(d) Drücken Sie zum Schluß

$$\vec{x}\,' = \sum_{j=1}^{3} x_j' \vec{e}_j$$

durch die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{n}$ aus und zeigen Sie, daß das Resultat mit (1) übereinstimmt.