

3.4.1 Bewegung im feldfreien Raum, Aharonov-Bohm-Effekt, Flußquant.

(a) Bewegung im feldfreien Raum

Der Hamiltonoperator für die Bewegung eines Teilchens in em. stat. Feld \vec{E}, \vec{B} lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + V \quad (1)$$

wobei $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$; $\vec{E} = -\text{grad } U - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; $V = eU$ (2)

ist und m Masse und die Ladung des Teilchen (z.B. ein Elektron) bedeuten.

Das Vektorpotential ist nur bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f(\vec{r}, t); \quad U \rightarrow U' = U - \frac{1}{c} \dot{f} \quad (3)$$

bestimmen. \vec{A} und \vec{A}' sollten gleiche Physik beschreiben!

Die SGL:

$$i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (4)$$

bleibt invariant, wenn man

$$\psi'(\vec{r}, t) = \exp[i\Lambda(\vec{r}, t)] \psi(\vec{r}, t) \quad (5)$$

$$\text{mit } \Lambda(\vec{r}, t) = \frac{e}{\hbar c} f(\vec{r}, t). \quad (6)$$

S. dazu den Anhang S.6-7

Bei vorgegeb. Anfangsbed. unterscheiden sich die Lsgn. der SGL also nur durch einen Phasenfaktor $\exp[i\Lambda(\vec{r}, t)]$, wenn ψ man die Eichtrafa (3) ausführt \Rightarrow Wsk.-Verteilung ändert sich nicht \Rightarrow Beide SGLs beschreiben gleiche Physik.

Betrachten wir die Bewegung eines freien Elektronen spin \uparrow

$$\vec{B} = 0, \text{ d.h. } \vec{A} = \text{grad } F(\vec{r}, t) \quad (7)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \text{grad } F \right)^2 + V \right] \psi = E \psi \quad (8)$$

Setzt man also $f = -\nabla\phi$ (3), ist die SGL (1) äquivalent zu

$$\left(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V \right) \psi_0 = E \psi_0, \quad (8)$$

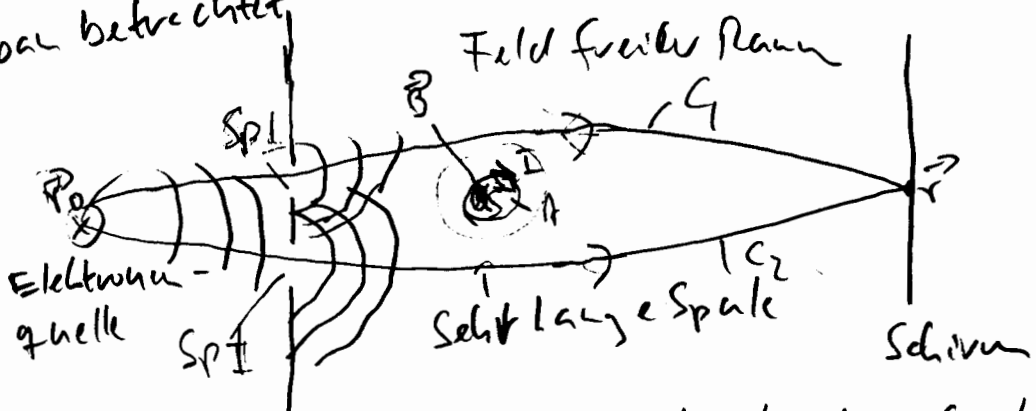
wobei $\psi_1 = \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int \vec{A} \cdot d\vec{r}\right) \psi_0$ (5)

Wegen $\vec{A} = \nabla \vec{F} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}, t) = \int_C d\vec{r}' \vec{A}(\vec{r}', t')$ (6)

wobei C ein beliebiger Weg von einem Anfangspunkt zum Endpunkt \vec{r} verläuft. Ist das Gebiet, in dem $\vec{B} = 0$ ist, einfach zusammenhängend, ist \vec{F} eindeutig durch \vec{A} bestimmt, und \vec{F} läßt sich "wegsehen"

(b) Photonen-Bohm-Effekt

Das ändert sich, wenn man z.B. den folgenden Versuchsaufbau betrachtet



Die Gesamtwelle funktion hinter dem Spalt ist die kohärente Überlagerung von Wellen funktionen für Elektronen, die durch den Spalt 1 und solchen, die durch Spalt 2 laufen

$$\psi = \psi_{10} + \psi_{20} \quad (11)$$

Schaltet man nun den Spaltenstrom ein, ist außerhalb der Spalte kein Feld. Erst durch Interferenz wegen C_1 und C_2 ist aufgrund des Vektorpotentials

$$\psi_1 = \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int_{C_1}^{\vec{r}} d\vec{r}' \vec{A}(\vec{r}')\right) \psi_{10}$$

$$\psi_2 = \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int_{C_2}^{\vec{r}} d\vec{r}' \vec{A}(\vec{r}')\right) \psi_{20}$$

Die Gesamtwellenfkt. ist also

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 \\ &= \psi_{10} \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int_{C_1}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t)\right) \psi \\ &\quad + \psi_{20} \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int_{C_2}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t)\right) \\ &= \left[\psi_{10} \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \left\{ \int_{C_1}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t) - \int_{C_2}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t) \right\}\right) \right. \\ &\quad \left. + \psi_{20} \right] \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int_{C_2}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t)\right) \end{aligned}$$

Man ist $\Delta\Lambda \neq 0$, weil wegen der Spalte des Gebiets nicht mehr einfach zusammenhängend. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda &= \int_{C_1}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t) - \int_{C_2}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t) \\ &\stackrel{\text{Stokes'scher Integralsatz}}{\downarrow} = \int_A d\vec{F} \cdot \vec{A} = \int_A d\vec{F} \cdot \vec{B} = \Phi \end{aligned}$$

mag. Fluß \downarrow

$$\Rightarrow \psi = \left[\psi_{10} \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \Phi\right) + \psi_{20} \right] \exp\left(-i \frac{e}{\hbar c} \int_{C_2}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t)\right)$$

↑
zusätzlicher relativer
Phasenfaktor

↑
unbeobachtbarer
Phasenfaktor

⇒ Verschiebung des Interferenzmusters

Der zusätzliche relative Phasenfaktor ist also beobachtbar, wichtig ist aber dieser beobachtbare Faktor sich invariant ist, denn der mag. Fluß läßt sich durch \vec{B} beschreiben. Allerdings zeigt sich, eine Art Nichtlokalität der QT: Ob wohl die Teilchen

nicht durch Regenbogen mit B-Feld fliegen, ergibt sich ein beobachtbarer Effekt, nämlich die Verschiebung des Interferenzmusters bei Einsetzen des Spaltenstroms. Teilchen sind aber nicht lokalisiert sondern entsprechend der Wellenfunktion mit der entsprechenden Wsk. an jedem Ort. Die Verschiebung des Interferenzmusters läßt sich nicht an Einzelteilchen nachweisen, nur an der Wsk. Verteilung von vielen gleichartig präparierten Teilchen auf dem Beobachtungsschirm. In diesem "minimierten statistischen Interpretation" ergibt sich kein Widerspruch zur Lokalität und Kausalität. Der AB-Effekt wurde mittlerweile als ein Überwiesensphänomen mit der Vorhersage der QT experimentell überprüft. (9)

Details: A. Tonomura et al., Phys. Rev. Lett. 48, 1443 (1982)
 Nozikebe et al., Phys. Rev. A 34, 815 (1986)

(c) Flußquantisierung

Der erhaltene Strom für die SGK wird bei Anwesenheit des Magnetfeldes modifiziert. Sie lautet:

$$\vec{j}_d = e \vec{j} = \frac{\hbar e}{2mc} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) - \frac{e^2}{mc} |\psi|^2 \vec{A}$$

Schreiben wir

$$\psi(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)| \exp[i\varphi(\vec{r}, t)],$$

$$\text{ist } \vec{j}_d = \frac{\hbar e}{m} |\psi|^2 \vec{\nabla} \varphi - \frac{e^2}{mc} |\psi|^2 \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{A} + \frac{mc}{\hbar e} \frac{1}{|\psi|^2} \vec{j}_d = \frac{\hbar c}{e} \vec{\nabla} \varphi$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} + \frac{mc}{\hbar e} \oint_C \frac{d\vec{l}}{|\psi|^2} \vec{j}_d = \frac{\hbar c}{e} \oint_C \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l}$$

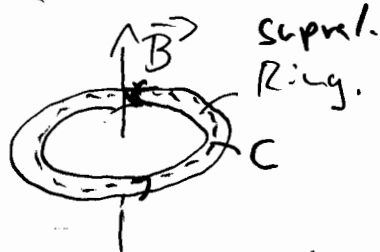
$$= \int_A d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{A} = \int_A d\vec{S} \cdot \vec{B} = \Phi$$

$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Delta\varphi = \text{Phaseänderung bei Umlauf um } 2\pi$ (5)

\Rightarrow Wegen der Eichfreiheit der Wellenfunktion muß

$$\Phi + \frac{m c}{\hbar^2} \oint_C \frac{1}{|\psi|^2} \vec{j}_\psi = \frac{m \cdot 2\pi}{\hbar} \frac{\hbar c}{e} ; n \in \mathbb{Z}$$

sein. Angenommen wir hätten die folgende Situation



Zunächst sei der Ring im Normalleitenden Zustand und befindet sich in einem Magnetfeld. Wird er dann soweit abgekühlt, daß er superleitend wird, fließt im Inneren kein Strom mehr. Lassen wir also den Integrationsweg C wie angedeutet ins Innere des Rings ist

$$\Phi = n \cdot \Phi_0 \quad \text{mit} \quad \Phi_0 = \frac{\hbar c}{e} \quad (\text{Londonsches Flussquant oder Fluxoid})$$

Das totale gequantelte Magnetfeld kommt dadurch zustande, daß beim Herunterkühlen des Rings im Supraleiter Oberflächenströme bilden, die verlustfrei fließen. q bedeutet die Ladungsträgerladung, die diesen supr. Strom erzeugen. Experimentell* ergibt sich, daß $q = -2e$ ist. Die Supraleitung wird durch Elektronenpaare verursacht, die aufgrund einer effektiven anziehenden Kraft zusammengefallen werden (allerdings im Inneren, nicht im Außenraum!). Das sind die sog. Cooper-Paare von denen eine makroskopische Zahl ein Bose-Einstein-Kondensat bilden, sobald die Temp. des Materials unter die kritische Temperatur für Supraleitung fällt.

*Schwerfeld zu verstehen ist eines der ersten Nachweiserperimente des Flussquantisierungseffekts: R. Doll, M. Näbauer, Phys. Rev. Lett. 7, 51 (1961)

Aufgabe: Eichinvarianz der SGL
Dikson

①

$$\hat{D} = \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi ; U' = U - \frac{e}{c} \dot{\chi} ; \psi' = \exp(i\Lambda) \psi$$

$$\hat{D} \psi = \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi$$

$$= \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi$$

$$\hat{D}' \psi' = \left[-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) \right] \left[\psi \exp(i\Lambda) \right]$$

$$= \left[-i\hbar \vec{\nabla} \psi + \hbar (\vec{\nabla} \Lambda) \psi - \frac{e}{c} (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) \psi \right] \exp(i\Lambda)$$

$$= \left[-i\hbar \vec{\nabla} \psi - \frac{e}{c} \vec{A} \psi + \vec{\nabla} \left(\hbar \Lambda - \frac{e}{c} \chi \right) \psi \right] \exp(i\Lambda)$$

$$= \left[\hat{D} \psi + \vec{\nabla} \left(\hbar \Lambda - \frac{e}{c} \chi \right) \psi \right] \cdot \exp(i\Lambda)$$

Setzt man

$$\Lambda = \frac{e}{\hbar c} \chi$$

gilt:

$$\hat{D}' \psi' = \exp\left(\frac{i e}{\hbar c} \chi\right) \cdot \hat{D} \psi$$

Die Eichtransformation für die em. Potentiale und die Schrödinger-Wellenfunktion ist also

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi ; U' = U - e \dot{\chi} ; \psi' = \exp(i\Lambda) \psi$$

Die Schrödinger-Gleichung mit em. Feldern lautet

(7)

$$i\hbar \partial_t \psi = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + eU \psi$$

$$= \frac{1}{2m} \hat{D}^2 \psi + eU \psi$$

Unter Eichtransformationen gilt mit $\psi' = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \chi\right) \psi$

$$\vec{D}' \psi' = \exp(i\Lambda) \vec{D} \psi$$

$$\Rightarrow \vec{D}'^2 \psi' = \exp(i\Lambda) \vec{D}^2 \psi$$

$$\Rightarrow i\hbar \partial_t \psi' = i\hbar \left[\partial_t \psi + \frac{ie}{\hbar c} (\partial_t \chi) \psi \right] \exp(i\Lambda)$$

$$= \frac{1}{2m} \hat{D}'^2 \psi' + eU' \psi'$$

$$= \left[\frac{1}{2m} \hat{D}^2 \psi + e \left(U - \frac{1}{c} \partial_t \chi \right) \psi \right] \exp(i\Lambda)$$

$$\Rightarrow i\hbar \partial_t \psi - \frac{e}{c} (\partial_t \chi) \psi = \frac{1}{2m} \hat{D}^2 \psi + eU \psi - \frac{e}{c} (\partial_t \chi) \psi$$

$$\Rightarrow i\hbar \partial_t \psi = \frac{1}{2m} \hat{D}^2 \psi + eU \psi$$