Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 10, Lösungen zur Hausübung

Hausübung 13 (Orts- und Impulsdarstellung)

(a) Für $n = 1$ ist die Behauptung gerade die Kommutatorrelation zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$:

$$\left[\mathbf{x}, \mathbf{p}^1\right] = [\mathbf{x}, \mathbf{p}] = \mathrm{i}\hbar\mathbb{1} = \mathrm{i}1\mathbf{p}^{1-1}. \tag{1}$$

Angenommen, die Aussage sei für irgendein $n - 1$ korrekt. Dann folgt

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}^n] = \left[\mathbf{x}, \mathbf{p}\mathbf{p}^{n-1}\right] = \mathbf{p}\left[\mathbf{x}, \mathbf{p}^{n-1}\right] + [\mathbf{x}, \mathbf{p}]\,\mathbf{p}^{n-1} = \mathrm{i}\hbar\mathbf{p}(n-1)\mathbf{p}^{n-2} + \mathrm{i}\hbar\mathbf{p}^{n-1} = \mathrm{i}\hbar n\mathbf{p}^{n-1}, \tag{2}$$

und das ist die Behauptung für n, so daß die Gleichung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen ist.

(b) Es gilt

$$[\mathbf{x}, \mathbf{T}(x)] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathbf{x}, \frac{(-\mathrm{i}x\mathbf{p}/\hbar)^k}{k!}\right] \stackrel{(2)}{=} x\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{-\mathrm{i}\hbar x\mathbf{p}}{\hbar}\right)^{k-1} = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-\mathrm{i}\hbar x\mathbf{p}}{\hbar}\right)^{k} = x\mathbf{T}(x). \tag{3}$$

Das ist gerade die zu beweisende Kommutatorrelation.

(c) Wegen $\mathbf{x}\,|u_0\rangle = 0$ ist

$$\mathbf{x}\mathbf{T}(x)\,|u_0\rangle = \{[\mathbf{x}, \mathbf{T}(x)] + \mathbf{T}(x)\mathbf{x}\}\,|u_0\rangle = x\mathbf{T}(x)\,|u_0\rangle\,. \tag{4}$$

Es ist also $\mathbf{T}(x)\,|u_0\rangle$ ein Eigenvektor zum Ortsoperator $\mathbf{x}$ zum Eigenwert x, d.h. es gilt (bis auf eine irrelevante Phase)

$$\mathbf{T}(x)\,|u_0\rangle = |u_x\rangle\,. \tag{5}$$

(d) Mit (5) ist

$$\begin{aligned} v_p(x) = \langle x \,|\, v_p\rangle = \langle u_x \,|\, v_p\rangle = \langle \mathbf{T}u_0 \,|\, v_p\rangle = \left\langle u_0 \,\middle|\, \mathbf{T}^\dagger(x)v_p\right\rangle = \langle u_0 \,|\, \exp(\mathrm{i}x\mathbf{p}/\hbar)\,v_p\rangle \\ = \exp\left(\frac{\mathrm{i}xp}{\hbar}\right)\underbrace{\langle u_0 \,|\, v_p\rangle}_{N(p)}. \end{aligned} \tag{6}$$

(e) Den Normierungsfaktor $N(p)$ finden wir aus

$$\begin{aligned} \delta(p-p') = \langle v_p \,|\, v_{p'}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\langle v_p \,|\, u_x\rangle\,\langle u_x \,|\, v_{p'}\rangle \\ &= N^*(p)N(p')\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p'-p)x\right] = 2\pi\hbar\delta(p-p')|N(p)|^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Bis auf einen irrelevanten Phasenfaktor ist dadurch der Normierungsfaktor zu

$$N(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{8}$$

bestimmt. Die Impulseigenfunktion in der Ortsdarstellung ist also

$$v_p(x) = \langle u_x \,|\, v_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}px}{\hbar}\right). \tag{9}$$

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`