

Übungen zur Quantenmechanik I

Lösungen zu Blatt 7 (Hausübung)

Hausübung 10 (Geiger-Nutallsche Formel)

- (a) Der klassische Umkehrpunkt ergibt sich aus dem Energiesatz als der Wert $r = R_c$, für den das α -Teilchen vollständig durch die Coulombbarriere abgebremst ist, d.h.

$$\frac{2e^2 Z'}{R_c} = E_\alpha \Rightarrow R_c = \frac{2e^2 Z'}{E_\alpha}. \quad (1)$$

- (b) Nach einigen elementaren Umformungen ergibt die auf dem Übungsblatt angegebene Substitution

$$\begin{aligned} \int_R^{R_c} dr \left[2m_\alpha \left(\frac{2e^2 Z'}{r} - \frac{2e^2 Z'}{R_c} \right) \right]^{1/2} &= 4\sqrt{eZ'm_\alpha R_c} \int_{\arcsin(\sqrt{R/R_c})}^{\pi/2} d\theta \cos^2 \theta \\ &= \sqrt{eZ'm_\alpha R_c} \left\{ \pi - 4 \arcsin \left(\sqrt{\frac{R}{R_c}} \right) - \sin \left[2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{R}{R_c}} \right) \right] \right\} \\ &\simeq \sqrt{eZ'm_\alpha R_c} \left(\pi - 4\sqrt{\frac{R}{R_c}} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Dabei haben wir die Entwicklung $\sin x \simeq x$ und $\arcsin x \simeq x$ für $|x| \ll 1$ benutzt.

Dies in die Gleichung für die Tunnelwahrscheinlichkeit eingesetzt, liefert

$$-\ln \left(\frac{T}{T_0} \right) = \frac{2\pi}{\hbar} \sqrt{e^2 Z' m_\alpha R_c} - \frac{8}{\hbar} \sqrt{e^2 Z' m_\alpha R}. \quad (3)$$

Ersetzen wir darin R_c gemäß (1), finden wir

$$-\ln \left(\frac{T}{T_0} \right) = \underbrace{\frac{2\pi}{\hbar} e^2 \sqrt{2m_\alpha}}_A \frac{Z'}{\sqrt{E_\alpha}} - \frac{8}{\hbar} \sqrt{e^2 Z' m_\alpha R}. \quad (4)$$

Verwenden wir schließlich, daß der Kernradius mit der Massenzahl bzw. Z' wie $R \propto Z'^{1/3}$ skaliert (d.h. für nicht zu kleine Kerne ist das Kernvolumen ungefähr $\propto Z'$), finden wir schließlich die Geiger-Nutallsche Formel

$$-\ln \left(\frac{T}{T_0} \right) = \frac{AZ'}{\sqrt{E_\alpha}} - BZ'^{2/3}. \quad (5)$$

Die gute Übereinstimmung mit dem beobachteten Zusammenhang zwischen α -Teilchenenergien und Halbwertszeit der dazugehörigen α -zerfallenden Nuklide zeigt zum einen, daß das hier verwendete Gamowsche Modell des α -Zerfalls im wesentlichen korrekt ist und zum anderen, daß der von der Quantentheorie vorhergesagte Tunneleffekt mit der Erfahrung übereinstimmt.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:

<http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/>