Übungen zur Quantenmechanik I

Lösungen zu Blatt 5 (Präsenzübung)

Präsenzaufgabe 8 (Drehimpulsoperatoren)

(a) Diese Gleichungen beweist man einfach durch Ausschreiben der Kommutatoren. Die linke Seite der Gleichung ist

$$\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}. \tag{1}$$

Die rechte Seite ist

$$\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}=\hat{A}(\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{B})+(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A})\hat{B}\overset{(1)}{=}\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}=\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]. \tag{2}$$

Damit ist die erste Identität auf dem Übungsblatt bewiesen. Die zweite kann einfach durch Rückführung auf diese Identität gezeigt werden:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right]=-\left[\hat{B}\hat{C},\hat{A}\right]=-\left\{\hat{B}\left[\hat{C},\hat{A}\right]+\left[\hat{B},\hat{A}\right]\hat{C}\right\}=\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]+\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}, \tag{3}$$

und genau das war zu zeigen.

(b) Es gilt unter zweimaliger Anwendung dieser Identitäten und der auf dem Blatt gegebenen „kanonischen Kommutatorrelationen" für $\hat{\vec{x}}$ und $\hat{\vec{p}}$:

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_i,\hat{L}_j\right]&=\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\left[\hat{x}_a\hat{p}_b,\hat{x}_c\hat{p}_c\right]=\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\left\{\hat{x}_a\left[\hat{p}_b,\hat{x}_c\hat{p}_c\right]+\left[\hat{x}_a,\hat{x}_c\hat{p}_d\right]\hat{p}_b\right\}\\&=\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\left\{\hat{x}_a\left[\hat{p}_b,\hat{x}_c\right]\hat{p}_d+\hat{x}_c\left[\hat{x}_a,\hat{p}_d\right]\hat{p}_b\right\}\\&=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}(-\delta_{bc}\hat{x}_a\hat{p}_b+\delta_{ad}\hat{x}_c\hat{p}_b).\end{aligned} \tag{4}$$

Nun gilt

$$\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\delta_{bc}=-\epsilon_{bia}\epsilon_{bjd}=-(\delta_{ij}\delta_{ad}-\delta_{id}\delta_{ja}) \tag{5}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung folgt schließlich

$$\left[\hat{L}_i,\hat{L}_j\right]=\mathrm{i}\hbar(\hat{x}_i\hat{p}_j-\hat{x}_j\hat{p}_i)=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k. \tag{6}$$

Das ist gerade die zu beweisende Kommutatorrelation.

(c) Wir können wieder die allgemeinen Operatoridentitäten (1) und (2) auf dem Übungsblatt und Gl. (6) verwenden:

$$\left[\hat{\vec{L}}^2,\hat{L}_i\right]=\delta_{ab}\left[\hat{L}_a\hat{L}_b,\hat{L}_i\right]=\delta_{ab}\mathrm{i}\hbar(\epsilon_{bij}\hat{L}_a\hat{L}_j+\epsilon_{aij}\hat{L}_j\hat{L}_b)=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{aij}(\hat{L}_a\hat{L}_j+\hat{L}_j\hat{L}_a). \tag{7}$$

Die Klammer in dem letzten Ausdruck ist symmetrisch unter Vertauschung der Indizes a und j, das Levi-Civitasymbol aber antisymmetrisch, so daß der ganze Ausdruck verschwinden muß, d.h.

$$\left[\hat{\vec{L}}^2,\hat{L}_i\right]=0, \tag{8}$$

und das war zu zeigen. Das bedeutet zusammen mit Gl. (6), daß $\hat{\vec{L}}^2$ mit jeder Drehimpulskomponente vertauscht, aber nicht die Drehimpulskomponenten untereinander. Es kann also immer nur eine Drehimpulskomponente (meist nimmt man L_z) und das Betragsquadrat des Drehimpulses simultan determiniert („meßbar") sein.

(d) Genau wie eben für $\hat{\vec{L}}^2$ zeigt man auch

$$\left[\hat{\vec{x}}^2, \hat{L}_j\right] = \left[\hat{\vec{p}}^2, \hat{L}_j\right] = 0 \tag{9}$$

Folglich kommutiert also auch jede Funktion $f(|\hat{\vec{p}}|)$ und $f(|\hat{\vec{x}}|) = f(r)$ mit $\hat{\vec{L}}$ und damit auch mit $\hat{\vec{L}}^2$. Der Hamiltonoperator ist aber voraussetzungsgemäß von der Form

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(r), \tag{10}$$

so daß also $\hat{H}$ mit $\hat{\vec{L}}$ und mit $\hat{\vec{L}}^2$ vertauscht.

Die Observablen H (Energie des Teilchens), $\vec{L}^2$ und L_z sind also simultan determinierbar. Wir können also einen Satz von simultanen Eigenvektoren zu diesen drei Observablen finden und jede Wellenfunktion nach diesen Eigenfunktionen entwickeln. Wir werden darauf auf dem nächsten Aufgabenblatt zurückkommen.