$\boxed{P6}$ (a) $\psi'' = -\varepsilon\psi$ für $|x| < b$; $\psi(x) \equiv 0$ für $x > b$

$\Rightarrow \psi(x) = A\exp(ikx) + B\exp(-ikx)$ mit $k = \sqrt{\varepsilon}$

Die Wellenfunktion ψ muß stetig bei $x = \pm b$ sein, d.h.

$\psi(b) = 0 \Rightarrow A\exp(ikb) + B\exp(-ikb) = 0$

$\psi(-b) = 0 \Rightarrow A\exp(-ikb) + B\exp(+ikb) = 0$

Dieses lin. Gleichungssystem kann nur dann von 0 verschiedene Lösungen haben, wenn mit $c_\pm = \exp(\pm ib)$

$$\det\begin{pmatrix} c_+ & c_- \\ c_- & c_+ \end{pmatrix} = c_+^2 - c_-^2 = 0 \Rightarrow c_+ = \pm c_-$$

Dann folgt jeweils

$c_+ = +c_-$: $c_+(A+B) = 0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow B = -A$

$\Rightarrow$ Wellenfunktion ungerade

$c_+ = -c_-$: $c_+(A-B) = 0 \Rightarrow A-B=0 \Rightarrow B = A$

$\Rightarrow$ Wellenfkt. gerade

Die Wellenfunktionen sind also Eigenfunktionen des Raumspiegeloperators $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$ zu Eigenwerten ± 1.

(b) Gerade (Parität $+1$)

$\psi(x) = \tilde{A}\cos(kx)$ mit $\tilde{A} = 2A$

$\psi(b) = 0 \Rightarrow k_n b = \frac{n\pi}{2}$ mit $n \in \{1, 3, 5, \cdots\}$

Die Energieeigenwerte sind

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\varepsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m}k_n^2 = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

(β) Ungerade (Parität −1) Wellenfunktionen

$$\psi(x) = A' \sin(kx) \Rightarrow (A' = 2iB)$$

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin(kb) = 0 \Rightarrow k_n b = \frac{n\pi}{2} \text{ mit}$$

$$n \in \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Die Energieeigenfunktionen sind

$$\psi_n = \begin{cases} A_n \cos(k_n x); & k_n = \frac{n\pi}{2b}; n \in \{1, 3, 5, \dots\} \\ B_n \sin(k_n x); & k_n = \frac{n\pi}{2b}; n \in \{2, 4, 6, \dots\} \end{cases}$$

Jede Wellenfunktion hat $(n-1)$ Knoten. Die Energieeigenwerte sind $E_n = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$. Skizze → Letzte Seite.

(γ) OBdA. wählen wir $A_n, B_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$C_{nn'} = \int_{-b}^{b} dx\, \psi_n(x) \psi_{n'}(x)$$

Wenn n gerade und n' ungerade oder n ungerade und n' gerade, ist $C_{nn'} = 0$. Sind beide gerade, folgt

$$C_{nn'} = B_n B_{n'} \int_{-b}^{b} dx\, \sin(k_n x) \sin(k_{n'} x)$$

Nun ist

$$\cos[(k_n \pm k_{n'})x] = \cos(k_n x)\cos(k_{n'} x) \mp \sin(k_n x)\sin(k_{n'} x)$$

$$\Rightarrow C_{nn'} = B_n B_{n'} \int_{-b}^{b} dx\, \frac{1}{2}\left[\cos[(k_n - k_{n'})x] - \cos[(k_n + k_{n'})x]\right]$$

$$= \frac{B_n B_{n'}}{2} \begin{cases} \left\{\frac{\sin[(k_n - k_{n'})x]}{k_n - k_{n'}} - \frac{\sin[(k_n + k_{n'})x]}{k_n + k_{n'}}\right\}_{-b}^{b} & ; n \neq n' \\ 2b - \left\{\frac{\sin[(k_n + k_{n'})x]}{k_n + k_{n'}}\right\}_{-b}^{b} & ; n = n' \end{cases}$$

Da $k_n \pm k_{n'} = \underbrace{(n \pm n')}_{\text{gerade}} \frac{\pi}{2b}$ ist

$$\sin[(k_n \pm k_{n'})b] = 0$$

und also

$$C_{nn'} = B_n^2 b \delta_{nn'} \Rightarrow B_n = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

Genauso ergibt sich, falls n, n' beide ungerade sind

$$C_{nn'} = A_n^2 b \delta_{nn'} \Rightarrow A_n = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

(c) $\Psi_n(x,t) := \varphi_n(x) \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)$

$$\Rightarrow i\hbar \partial_t \Psi_n(x,t) = E_n \varphi_n(x) \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)$$

und $-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi_n(x,t) = E_n \varphi_n(x) \exp\left(-i \frac{E_n t}{\hbar}\right)$,

da für $\varphi_n(x)$ die zeitunabh. Schrödingergleichung gilt:

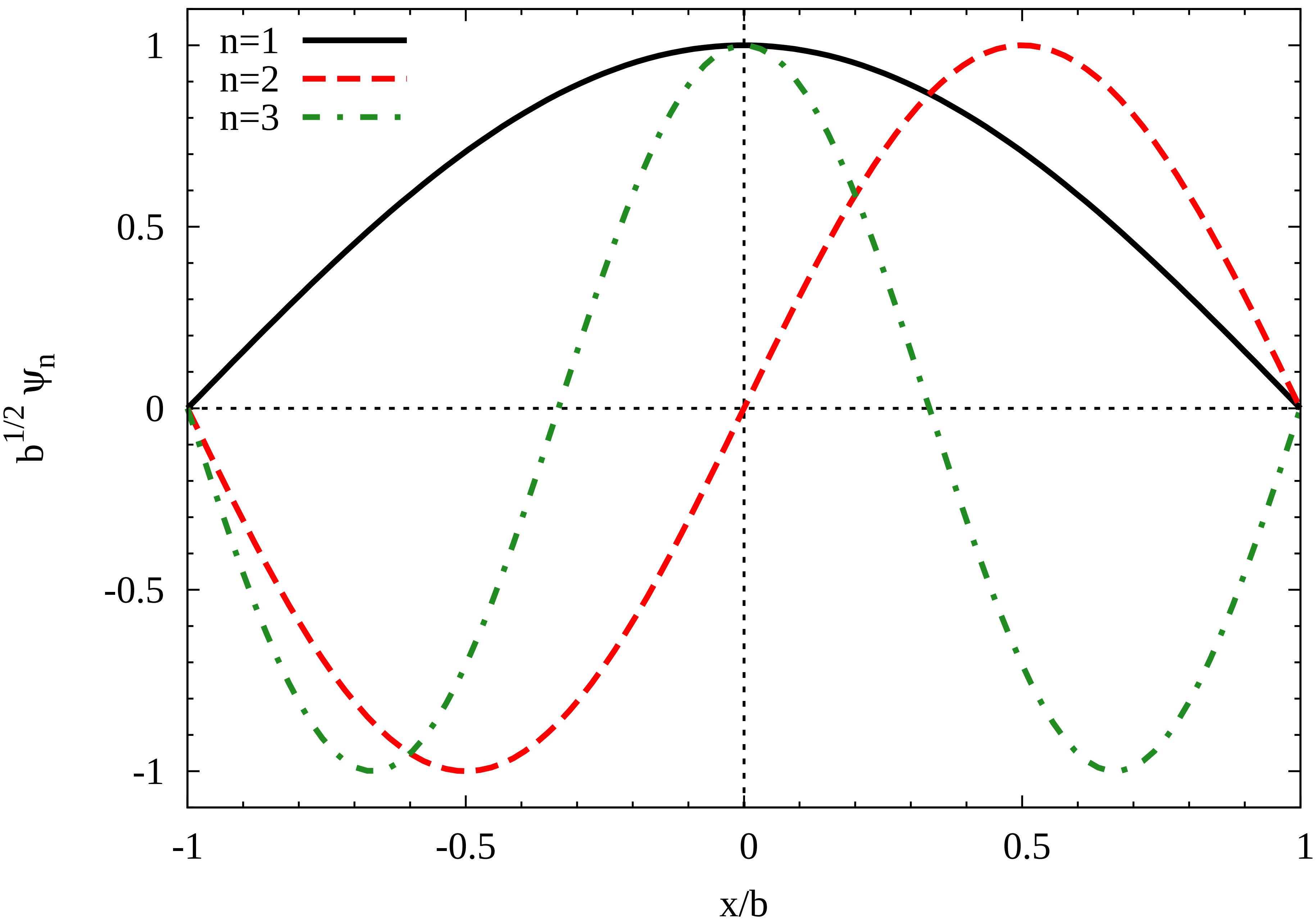
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi_n''(x) = E_n \varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow i\hbar \partial_t \Psi_n(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi_n(x,t)$$

Dasselbe gilt dann für die Linearkombination (4). qed.

$$\int_{-b}^{b} dx\, \Psi^*(x,t)\, \Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n,n'=1}^{\infty} C_n^* C_{n'} \varphi_n^*(x) \varphi_{n'}(x) \cdot \exp\left[\frac{it}{\hbar}(E_n - E_{n'})\right]$$

$$= \sum_{n,n'=1}^{\infty} c_n c_{n'}^* \delta_{nn'} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$



n=1
n=2
n=3
1
0.5
0
-0.5
-1
$b^{1/2}\psi_n$
-1
-0.5
0
0.5
1
x/b