H3 (a) Da hier $c_1 = N$; $c_2 = iN$; $c_n = 0$ für $n \geq 2$ folgt (4)

wegen (6)

$$\int_{-a}^{a} dx\, |\Psi(x,t)|^2 = |N|^2 + |iN|^2 = 2|N|^2 \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) $$\langle x \rangle(t) = \int_{-a}^{a} dx\, \Psi^*(x,t) \times \Psi(x,t)$$

$$= \int_{-a}^{a} dx\, x\, |\Psi(x,t)|^2$$

$$\boxed{\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}}$$

$$\Downarrow$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\left[\psi_1(x) \exp(i\omega_1 t) - i\psi_2(x) \exp(i\omega_2 t)\right]\left[\psi_1(x) \exp(-i\omega_1 t) + i\psi_2(x) \exp(-i\omega_2 t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x) + i\psi_1\psi_2 \left\{\exp[i(\omega_1-\omega_2)t] - \exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\right\}\right]$$

$$\Rightarrow |\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\Big\{\underbrace{\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)}_{\text{gerade}} + 2\underbrace{\psi_1(x)\psi_2(x)}_{\text{ungerade}} \sin[(\omega_2-\omega_1)t]\Big\}$$

$$\Rightarrow \langle x \rangle(t) = \int_{-a}^{a} dx\, \psi_1(x)\psi_2(x) \sin[(\omega_2-\omega_1)t]\, x$$

$$= \int_{-a}^{a} dx\, \frac{1}{a} \cos(k_1 x) \sin(k_2 x) \times \sin[(\omega_2-\omega_1)t]$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x \rangle(t) = \frac{32a}{9\pi^2} \sin[(\omega_2-\omega_1)t]}$$

$$\langle x^2\rangle(t) = \int_{-b}^{b} dx \; |\Psi(x,t)|^2 \, x^2$$

$$= \frac{b^2}{12}\left(4 - \frac{15}{\pi^2}\right)$$

Zur Berechnung der Integrale

$$\varphi_1(x)\,\varphi_2(x) = \frac{1}{b}\cos(k_1 x)\sin(k_2 x)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-b}^{b} dx\; \varphi_1(x)\varphi_2(x)\, x = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} dx \left[\sin[x(k_2+k_1)] + \sin[x(k_2-k_1)]\right] x$$

$$\int_{-b}^{b} dx\; \sin(kx)\, x = -\frac{1}{k}\cos(kx)\, x \Big|_{-b}^{b} + \int_{-b}^{b} dx\, \frac{1}{k}\cos(kx)$$

$$= \frac{2}{k^2}\sin(kb) - \frac{2b}{k}\cos(kb)$$

Da $(k_2 \pm k_1)b = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$, ist also

$$\frac{1}{b}\int_{-b}^{b} dx\, x\cos(k_1 x)\sin(k_2 x) = b\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2\right]$$

$$= \frac{32 b}{9\pi^2}$$

$$\varphi_1^2(x) = \frac{1}{b}\cos^2(k_1 x)$$

$$\varphi_2^2(x) = \frac{1}{b}\sin^2(k_2 x)$$

Es gilt

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\alpha)\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-b}^{b} dx\, x^2\, \varphi_1^2(x) = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} dx\, x^2 \left[1 + \cos(2k_1 x)\right]$$

Berechne

$$\int_{-b}^{b} dx \cos(\alpha x) = \frac{2}{\alpha}\sin(\alpha x)\Big|_0^b = \frac{2}{\alpha}\sin(\alpha b)$$

$$\Rightarrow \int_{-b}^{b} dx \cos(\alpha x)\, x^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_{-b}^{b} dx \cos(\alpha x)\, x^2$$

$$= -\frac{d}{d\alpha}\left[-\frac{2}{\alpha^2}\sin(\alpha b) + 2\frac{b}{\alpha}\cos(\alpha b)\right]$$

$$= -\left[\frac{4}{\alpha^3}\sin(\alpha b) - \frac{4b}{\alpha^2}\cos(\alpha b) - \frac{2b^2}{\alpha}\sin(\alpha b)\right] \quad (*)$$

Mit $\alpha = 2k_1 \Rightarrow \sin(\alpha b) = 0;\ \cos(\alpha b) = -1$

$$\Rightarrow \int_{-b}^{b} dx \cos(2k_1 x)\, x^2 = -\frac{b}{k_1^2} = -\frac{4b^3}{\pi^2}$$

$$= \int_{-b}^{b} dx\, \varphi_1^2(x) = \frac{1}{b}\int_0^b dx\, x^2 - \frac{2b^2}{\pi^2} = b^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\right)$$

$$\int_{-b}^{b} dx\, x^2\, \varphi_2^2(x) = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} dx\, x^2\left[1 - \cos(2k_2 x)\right]$$

$$\int_{-b}^{b} dx\, x^2 \cos(2k_2 x) \overset{(*)}{=} \frac{4b}{(2k_2)^2} = \frac{b}{k_2^2} = \frac{b^3}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-b}^{b} dx\, \psi_2^2(x) = b^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-b}^{b} dx\, x^2 \left[\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)\right] = b^2\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2}\right)$$

$$= b^2\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2\pi^2}\right)$$

$$= \frac{b^2}{6}\left(4 - \frac{15}{\pi^2}\right)$$

q.e.d.

H4) (a) ⑧

$$\psi'' = [u(x) - \varepsilon]\,\psi(x) \quad \text{mit } \varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}\,;\; u = \frac{2mV}{\hbar^2}$$

Die Funktion muß zweimal differenzierbar sein, aber die zweite Ableitung kann bei $x=0$ einen Sprung aufweisen, da das Potential einen Sprung hat. ψ und ψ' sind also differenzierbar und damit sicher stetig bei $x=0$.

(b) $0 < E < V_0 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < u_0$

$x<0$:

$$\psi_E''(x) = -\varepsilon\,\psi_E(x) = k^2\psi_E(x) \quad \text{mit } k=\sqrt{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \psi_E(x) = A_1 \exp(ik\cdot x) + B_1 \exp(-ikx)$$

$x>0$

$$\psi_E(x) = A_2 \exp(-\varkappa x) + B_2 \exp(\varkappa x) \quad \text{mit } \varkappa = \sqrt{u_0 - \varepsilon}$$

Da ψ_E im ∞ nicht exponentiell wachsen darf, muß $B_2 = 0$ sein. Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt

$$\psi:\quad A_1 + B_1 = A_2$$

$$\psi':\quad ik(A_1 - B_1) = -\varkappa A_2$$

Löse nach B_1 und A_2 auf:

$$B_1 = A_2 - A_1 \Rightarrow$$

$$ik(2A_1 - A_2) = -\varkappa A_2$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{2ik}{ik-\varkappa} A_1$$

$$B_1 = \left[\frac{2ik}{ik-\varkappa} - 1\right] A_1 = \frac{ik+\varkappa}{ik-\varkappa} A_1$$

$\varepsilon > u_0$

Zwei linear unabh. Lsgn. gemäß P6

$$x<0:\quad \psi_E^{\pm}(x) = A_1^{\pm}\exp(ikx) + B_1^{\pm}\exp(-ikx)\,;\quad k=\sqrt{\varepsilon}$$

$$x>0:\quad \psi_E^{\pm}(x) = A_2^{\pm}\exp(\pm ik'x)\,;\quad k' = \sqrt{\varepsilon - u_0}$$

Stetigkeitsbed.:

$\psi: \; A_1^{\pm} + B_1^{\pm} = A_2^{\pm}$

$\psi': \; ik(A_1^{\pm} - B_1^{\pm}) = \pm i k' A_2^{\pm}$

$B_1^{\pm} = A_2^{\pm} - A_1^{\pm}$

$2A_1^{\pm} - A_2^{\pm} = \pm \frac{k'}{k} A_2^{\pm} \Rightarrow \left(1 \pm \frac{k'}{k}\right) A_2^{\pm} = 2A_1^{\pm}$

$\Rightarrow A_2^{\pm} = \frac{2k}{k \pm k'} A_1^{\pm}$

$B_1^{\pm} = \left(\frac{2k}{k \pm k'} - 1\right) A_1^{\pm} = \frac{k \mp k'}{k \pm k'} A_1^{\pm}$

<u>NB</u>

<u>$E<0$</u>

$x<0: \; \psi_E(x) = B_1 \exp(\varkappa' x) \; ; \; \varkappa' = \sqrt{-E}$

$x>0: \; \psi_E(x) = A_2 \exp(-\varkappa x) \; ; \; \varkappa = \sqrt{U_0 - E}$

Die jeweils andere Lösung würde für $x \to \mp\infty$ exponentiell anwachsen. Stetigkeitsbed.:

$\psi: \; B_1 = A_2$

$\psi': \; \varkappa' B_1 = -\varkappa A_2 \Rightarrow (\varkappa' + \varkappa) A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \, ; \; B_1 = 0$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Lsgn. zu $E<0$ (außer $\psi \equiv 0$)

$\Rightarrow$ keine geb. Zustände

(c) $j_E = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left[\psi_E^*(x) \, \psi_E'(x)\right]$ (vgl. P5e)

$\Rightarrow$ <u>$0<E<U_0$:</u> $j = 0$; <u>$E>0$:</u> $j^{\pm} = \pm \frac{\hbar k}{m} |A_2^{\pm}|^2$

$= \frac{\hbar k'}{m} \left(|A_1^{\pm}|^2 - |B_1^{\pm}|^2\right)$

(d) $0 \leq E < U_0$:

$$T = 0 \,;\quad R = \frac{k\,|B_1|^2}{k\,|A_1|^2} = \left|\frac{ik+\kappa}{ik-\kappa}\right|^2 = 1$$

$E > U_0$

$$T = \frac{k'\,|A_2^+|^2}{k\,|A_1^+|^2} = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$$

$$R = \frac{k\,|B_1^+|}{k\,|A_1^+|} = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2$$

$$T+R = \frac{1}{(k+k')^2}\left[(k-k')^2+4kk'\right] = \frac{(k+k')^2}{(k+k')^2} = 1$$

Für $0 < E < U_0$ werden alle Teilchen reflektiert. Es gelangen keine Teilchen zu Orten $x \gg 0$.

Für $E > U_0$ wird ein Teil der Teilchen reflektiert. Der andere Teil überwindet die Potentialstufe.