Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 2

$\boxed{P3}$ $$I_\varepsilon(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)(x-x_0)^n$$

Definiere erzeugende Funktion

$$F_\varepsilon(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon} \exp\left[-\frac{x^2}{\varepsilon^2} + a(x-x_0)\right]$$

$$\overset{P2}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon}\sqrt{\pi}\,\varepsilon \exp\left(\frac{a^2\varepsilon^2}{4} - a x_0\right)$$

$$= \exp\left(\frac{a^2\varepsilon^2}{4} - a x_0\right)$$

Für $\varepsilon \to 0$

$$F_{\varepsilon\to 0}(a) = \exp(-a x_0)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x_0) = \frac{d^n}{da^n} F_{\varepsilon\to 0}(a)\Big|_{a=0} = (-x_0)^n$$

qed.

$\boxed{P4}$ Wenn die Behauptung gilt, folgt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) \exp(ikx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \exp\left[ik(x-x')\right]$$

Wenn wir also zeigen können, daß im Sinne verallgemeinerter Funktionen gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp\left[ik(x-x')\right] = \delta(x-x')$$

haben wir die Umkehrformel bewiesen.

Wir setzen der Einfachheit halber $x' = 0$ und zeigen also Gl. (8) auf dem Blatt

Es gilt

$$\tilde{\delta}_\varepsilon(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\varepsilon(x) \exp(-ikx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2} - ikx\right)$$

$$\overset{P_2}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon} \sqrt{\pi}\,\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 k^2}{4}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 k^2}{4}\right)$$

Prüfen wir nun die Umkehrformel nach

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\delta}_\varepsilon(k) \exp(ikx) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon k^2}{4} + ikx\right)$$

$$\overset{P_2}{=} \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$= \delta_\varepsilon(x) \quad \text{q.e.d.}$$

Im schwachen Sinne gilt also

$$\delta(x) = \underset{\varepsilon \to 0^+}{\text{w lim}}\, \delta_\varepsilon(x) = \underset{\varepsilon \to 0^+}{\text{w lim}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\delta}_\varepsilon(k) \exp(ikx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\delta}_\varepsilon(k)}_{1} \exp(ikx) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp(ikx)$$

q.e.d.

$\boxed{PS}$ (a) Mit

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}(k,t) \exp(ikx)$$

folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[i\hbar \partial_t \tilde{\psi}(k,t) \right] \exp(ikx) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}(k,t) \cdot \left(+ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \exp(ikx)$$

Da die Fouriertrafo umkehrbar ist, muß also

$$i\hbar \partial_t \tilde{\psi}(k,t) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tilde{\psi}(k,t)$$

gelten.

$$\Rightarrow \partial_t \tilde{\psi}(k,t) = -\frac{i\hbar k^2}{2m} \tilde{\psi}(k,t)$$

Diese DGL läßt sich durch "Trennen der Variablen" lösen

$$\frac{d\tilde{\psi}}{\tilde{\psi}} = -dt \frac{i\hbar k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}(k,t) = \underbrace{\tilde{\psi}(t=0,k)}_{\tilde{\psi}_0(k)} \exp\left(-\frac{i\hbar k^2 t}{2m} \right)$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}_0(k) \exp\left(-\frac{i\hbar k^2 t}{2m} + ikx \right)$$

Physikalische Interpretation: Da die Schrödingergleichung von 1. Ordnung in der Zeit ist, benötigt man eine Anfangsbedingung

$$\psi(x, t=0) = \psi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{\psi}_0(k) \exp(ikx)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{\psi}_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_0(x) \exp(-ikx)$$

Bei vorgegebener Anfangsbedingung ("Präparation") ist die Wellenfunktion zu allen Zeiten durch die Schrödingergleichung eindeutig bestimmt.

(b) $$N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x,t)\, \psi(x,t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \tilde{\psi}^*(k,t) \exp(-ikx) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}\, \tilde{\psi}(k',t) \exp(ik'x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}\, \tilde{\psi}^*(k,t)\, \tilde{\psi}(k',t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[i(k'-k)x]$$

$$\overset{P4}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}\, \tilde{\psi}^*(k,t)\, \tilde{\psi}(k',t)\, 2\pi\, \delta(k-k')$$

$$N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\Psi}^*(k,t)\, \tilde{\Psi}(k,t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left|\tilde{\Psi}(k,t)\right|^2$$

Da

$$\tilde{\Psi}(k,t) = \tilde{\Psi}_0(k) \exp\left(-\frac{\hbar k^2}{2m} t\right),$$

folgt

$$|\tilde{\Psi}(k,t)|^2 = |\tilde{\Psi}_0(k)|^2 \Rightarrow N(t) = \text{const.}$$

(c) $$\frac{dN(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^*(x,t)\, \psi(x,t)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t} \psi(x,t) + \psi^*(x,t) \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*(x,t)}{\partial x^2} \psi(x,t) + \psi^*(x,t) \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right]$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial^2 \psi^*(x,t)}{\partial x^2} \psi(x,t) - \psi^*(x,t) \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right]$$

2x partiell integrieren

$$= -\frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\psi^*(x,t) \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \psi^*(x,t) \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right]$$

$= 0$ q.e.d.