$\boxed{4.1}$ $\boxed{10 \text{ Punkte}}$

(a) Trenne zunächst Argument der Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil

$$\frac{\alpha x^2 - i k_0 x + i\beta k_0^2 t}{1 + 4i\alpha\beta t} = \frac{(\alpha x^2 - i k_0 x + i\beta k_0^2 t)(1 - 4i\alpha\beta t)}{1 + 16\alpha^2\beta^2 t^2}$$

$$= \frac{1}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}\Big[\alpha x^2 - 4\alpha\beta k_0 t x + 4\alpha\beta^2 k_0^2 t^2 + i\left(-4\alpha^2\beta t x^2 - k_0 x + \beta k_0^2 t\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}\Big[\alpha (x - 2\beta k_0 t)^2 + i(\cdots)\Big]$$

$$\Rightarrow P(x,t) = \frac{|N|^2}{\sqrt{1+16\alpha^2\beta^2t^2}} \exp\left[-\frac{2\alpha}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}(x - 2\beta k_0 t)^2\right] \quad (*)$$

$$= \frac{|N|^2}{\sqrt{1+16\alpha^2\beta^2t^2}} \exp\left(\frac{-8\alpha\beta^2k_0^2t^2}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\alpha}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}x^2 + \frac{8\alpha\beta k_0 t}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}x\right)$$

$\boxed{2}$

Mit P2 erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x,t) = \frac{|N|^2\sqrt{\pi}}{\cancel{\sqrt{1+16\alpha^2\beta^2t^2}}} \cancel{\exp\left(-\frac{8\alpha\beta^2k_0^2t^2}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{1+16\alpha^2\beta^2t}}{2\alpha}} \cancel{\exp\left(\frac{8\alpha^2\beta^2k_0^2t^2}{\alpha(1+16\alpha^2\beta^2t^2)}\right)}$$

$\boxed{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x,t) = |N|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \Rightarrow |N| = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$$

(b) In der Form (*) läßt sich sofort ablesen, daß

$$x_{max} = 2\beta k_0 t = \frac{\hbar}{m} k_0 t \qquad \boxed{1}$$

⇒ Wellenpaket „bewegt" sich mit Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$$

⇒ $\hbar k_0 = p_0$ = const. Impuls

(c) Es gilt:

$$P(x,t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi(1+16\alpha^2\beta^2t^2)}} \exp\left(-\frac{8\alpha\beta^2k_0^2t^2}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}\right)$$

$$\cdot \exp\left(-\underbrace{\frac{2\alpha}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}}_{a} x^2 + \underbrace{\frac{8\alpha\beta k_0 t}{1+16\alpha^2\beta^2t^2}}_{b} x\right)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \exp\left(-ax^2 + bx\right)$$

mit den Bezeichnungen von P1 für a und b. Es gilt dann wegen P1(d):

$$\langle x \rangle = \frac{1}{I(a,b)} J_1 = \frac{b}{2a} = 2\overset{\beta k_0 t}{\beta k_0 t} = x_{max}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{I(a,b)} J_2 = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{b^2}{2a}\right)$$

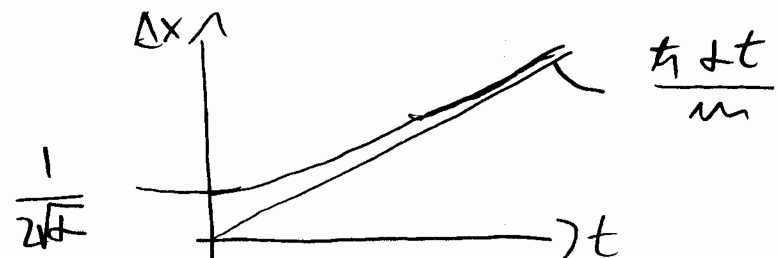
$$\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{1}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{2a}$$

$$= \frac{1+16\alpha^2\beta^2 t^2}{4\alpha}$$

$$= \left(1 + \frac{4\hbar^2\alpha^2 t^2}{m^2}\right)\frac{1}{4\alpha}$$

$$\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{m^2 + 4\hbar^2\alpha^2 t^2}{4m^2\alpha} \qquad \boxed{2}$$

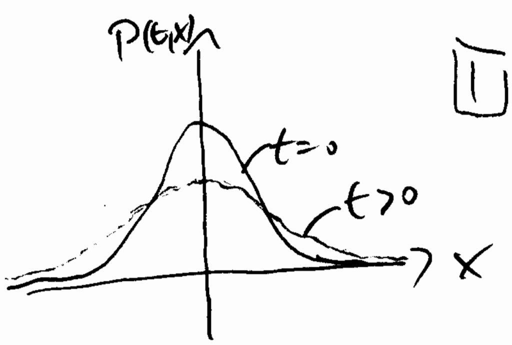
(d) $\Delta x = \sqrt{\dfrac{m^2+4\hbar^2\alpha^2 t^2}{4m^2\alpha}}$



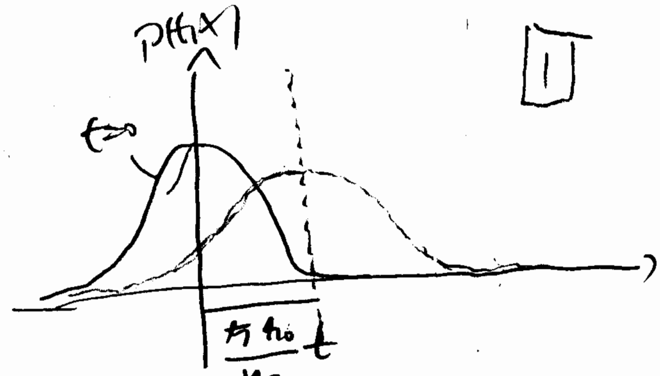
$\boxed{1}$

Die Ortsunschärfe wächst mit der Zeit an.

(e) $k_0 = 0$



$\boxed{1}$



$\boxed{1}$

Wellenpaket bewegt sich mit Geschwindigkeit $v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$ und wird mit der Zeit immer breiter.