Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **10. Juli 2009**

2. Klausur zur Quantenmechanik I

Hinweise:

Die Klausur beinhaltet **7 Aufgaben**. Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden. Es sind außer einem Lehrbuch zur Quantenmechanik und dem Bronstein keine Hilfsmittel zugelassen!

Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 75 Punkte. Das Erreichen von mindestens 50 Punkten wird als 100% gewertet.

Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, auf das erste auch Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen mit der Masse μ, das sich in einem symmetrischen harmonischen Oszillatorpotential bewegt, lautet

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + \frac{\mu\omega^2}{2}\hat{\vec{x}}^2.$$

(a) Welche Symmetrien weist dieser Hamiltonoperator auf?

(b) Schreiben Sie den Hamiltonoperator in geeignete an diese Symmetrien angepaßte Koordinaten um.

(c) Der Grundzustand ist durch die Wellenfunktion

$$\psi_0(\vec{x}) = \frac{1}{a^{3/2}\pi^{3/4}} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2a^2}\right), \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}$$

gegeben. Schreiben Sie diese Wellenfunktionen in geeignete Koordinaten um. Welche Werte für $\vec{l}^2$ und l_z können sich bei der Messung dieser Größen an einem Teilchen, das in diesem Zustand präpariert wurde, ergeben?

(d) Ein Zustand zum nächsthöheren Energieeigenwert lautet

$$\psi_1(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^{3/4}a^{5/2}}(x + \mathrm{i}y) \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2a^2}\right).$$

Welche Werte für $\vec{l}^2$ und l_z können sich jetzt ergeben?

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Stellen Sie sich vor, daß sie die Wellenfunktion zum zweiten angeregten Zustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators wissen wollen. Sie fragen Ihre Mitstudierenden und erhalten von Kommilitone A die Antwort

$$\psi_A(x) = N(x^2 + ax) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

und von Kommilitonin B die Antwort

$$\psi_B(x) = N(x^2 + 1) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right).$$

Dabei sollen x die Ortskoordinate und N und a geeignete Konstanten bezeichnen. Warum kann die Antwort von A nicht stimmen? Warum kann auch die Antwort von B nicht stimmen?

Aufgabe 3 (15 Punkte)
Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

mit den Energieeigenzuständen $|n\rangle$ zu den Energieeigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ $(n \in \{0, 1, 2, \ldots\})$. Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand durch

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle$$

gegeben.

(a) Geben Sie $|\psi(t)\rangle$ für $t \neq 0$ an.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jeweils die Energie E_0 bzw. E_1 bzw. E_2 gemessen?

(c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von Ort x und Impuls p bezüglich $|\psi(t)\rangle$.

(d) Berechnen Sie die Ortsraumdichte $|\psi(x, t)|^2$. Dabei ist $\psi(x, t) = \langle x \,|\, \psi(t)\,\rangle$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Ein Wasserstoffatom befinde sich im Energieeigenzustand zur Hauptquantenzahl $n = 2$, Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 1$ und Magnetquantenzahl $m = 0$. Berechnen Sie das mittlere elektrische Dipolmoment

$$\left\langle \vec{P} \right\rangle = -e\,\langle \vec{x} \rangle\,.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem beliebigen Zustand zur Hauptquantenzahl $n = 2$.

(a) Wie groß ist das elektrische Dipolübergangsmatrixelement zwischen den Drehimpulszuständen $l = m = 0$ und $l = m = 1$ für $\hat{P}_x = -e\hat{x}$

$$W_{200,211} = \left\langle 200 \left| \hat{P}_x \right| 211 \right\rangle ?$$

(b) Wie groß ist das Übergangsmatrixelement zwischen $l = m = 0$ und $l = 1$, $m = 0$?

Aufgabe 6 (10 Punkte)

In effektiven Modellen für Streuprozesse (z.B. in der Kernphysik) werden komplexe Potentiale $V(\vec{x}) = V_1(\vec{x}) - \mathrm{i}V_2(\vec{x})$, wobei $V_1, V_2 \in \mathbb{R}$ und $V_2 \geq 0$ ist, verwendet, d.h. in die Schrödingergleichung geht der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}_{\vec{x}}^2 + V_1(\vec{x}) - \mathrm{i}V_2(\vec{x})$$

ein.

(a) Ist dieser Hamiltonoperator linear? Ist er hermitesch? Begründen Sie kurz Ihre Antworten.

(b) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung her! Was ändert sich gegenüber dem Fall rein reeller Potentiale?

(c) Was ergibt sich daraus für die Wahrscheinlichkeitsdichte ϱ? Interpretieren Sie Ihr Resultat für den Fall $V_2 \geq 0$.

Aufgabe 7 (15 Punkte)

Die Paulischen Spinmatrizen lauten

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der dazugehörige Spinoperator ist $\hat{\vec{s}} = (\hbar/2)\hat{\vec{\sigma}}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für $\hat{s}_y$. Drücken Sie die Eigenvektoren von $\hat{s}_y$ als Linearkombinationen der Eigenvektoren von $\hat{s}_z$ aus.

(b) Ein Teilchen befinde sich im Zustand $|s_z = +\hbar/2\rangle$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Messen von s_y die in Teilaufgabe (a) bestimmten möglichen Meßwerte zu erhalten?

(c) Kann man ein Elektron (das den Spin 1/2 besitzt) so präparieren, daß s_y und s_z zugleich scharfe Werte besitzen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Nützliche Formeln

Hermitepolynome

$$\mathrm{H}_0(\xi) = 1, \quad \mathrm{H}_1(\xi) = 2\xi, \quad \mathrm{H}_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad \mathrm{H}_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi, \quad \mathrm{H}_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12.$$