Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **06. Juni 2009**

1. Klausur zur Quantenmechanik I

Hinweise:

Die Klausur beinhaltet **8 Aufgaben**. Die Bearbeitungszeit beträgt 3 Stunden. Es sind außer dem Formelanhang und dem Bronstein keine Hilfsmittel zugelassen!

Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 75 Punkte. Das Erreichen von mindestens 50 Punkten wird als 100% gewertet.

Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, auf das erste auch Ihre Matrikelnummer. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Geben Sie das allgemeine Kriterium dafür an, daß ein Operator $\hat{O}$, der auf Wellenfunktionen $\psi(\vec{x})$ wirkt, *linear* ist.

(b) Geben Sie das allgemeine Kriterium dafür an, daß ein Operator $\hat{O}$, der auf Wellenfunktionen $\psi(\vec{x})$ wirkt, *hermitesch* ist.

(c) Untersuchen Sie, welche der folgenden Operatoren

$$\begin{aligned}
\hat{O}_1\psi(\vec{x}) &= -\mathrm{i}\hbar x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(\vec{x}),\\
\hat{O}_2\psi(\vec{x}) &= \hbar x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(\vec{x}),\\
\hat{O}_3\psi(\vec{x}) &= -\mathrm{i}\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \right)\psi(\vec{x})
\end{aligned}$$

linear und welche hermitesch sind.

(d) Berechnen Sie den Kommutator zwischen $\hat{\vec{p}}^2$ und $\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Der Paritäts- oder Raumspiegelungsoperator $\hat{P}$ ist durch seine Wirkung auf die Wellenfunktion ψ

$$\hat{P}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, daß $\hat{P}$ linear und hermitesch ist.

(b) Berechnen Sie $\hat{P}^2$.

(c) Welche Eigenwerte besitzt $\hat{P}$?

(d) Ein Teilchen bewege sich in einem beliebigen Zentralpotential $V(r)$ (mit $r = |\vec{x}|$) und befinde sich in einem Energieeigenzustand. Kann dieser Zustand gleichzeitig eine bestimmte Parität besitzen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (15 Punkte)
Wir betrachten ein Teilchen, das sich entlang der x-Achse in dem unendlich tiefen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq b \\ \infty & \text{für } |x| > b \end{cases}$$

bewegt. Die auf 1 normierten Energieeigenfunktionen sind für $|x| \leq b$ durch

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{cases} \cos(k_n x) & \text{falls } n \in \{1, 3, 5, \ldots\} \\ \sin(k_n x) & \text{falls } n \in \{2, 4, 6, \ldots\} \end{cases}$$

gegeben. Für $|x| > b$ verschwinden die Wellenfunktionen. Es ist $k_n = \frac{n\pi}{2b}$, und die dazugehörigen Energieeigenwerte sind

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 .$$

Zur Zeit $t = 0$ ist der Zustand des Teilchens durch die auf 1 normierte Wellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{30}{b^5}} x(b - x) & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Wellenfunktion $\Psi(x, t = 0)$.

(b) Entwickeln Sie den Anfangszustand nach Energieeigenfunktionen, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten c_n in

$$\Psi(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x).$$

(c) Wie lautet die Entwicklung der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ nach Energieeigenfunktionen für Zeiten $t > 0$? **Hinweis:** Sie brauchen die Reihe *nicht* in einen analytischen Ausdruck umzuformen!

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_n(t)$, zur Zeit t bei einer Messung der Energie den Wert E_n zu erhalten?

(e) Angenommen bei einer Energiemessung zur Zeit t_1 finden Sie den Wert E_3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer erneuten Messung der Energie zu einer späteren Zeit $t_2 > t_1$, wieder denselben Wert E_3 zu erhalten?

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Wir betrachten ein Teilchen, das sich entlang der x-Achse im repulsiven δ-Potential

$$V(x) = V_0 \delta(x)$$

$(V_0 > 0)$ bewegt.

(a) Wie lauten die Bedingungen an die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung an der singulären Stelle $x = 0$?

(b) Bestimmen Sie die von links her einfallenden ungebundenen Lösungen.

(c) Berechnen Sie Reflexions- und Transmissionskoeffizienten als Funktion der Teilchenenergie.

(d) Gibt es gebundene Zustände? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Ein Teilchen der Masse m bewegt sich entlang der x-Achse unter Einfluß des endlich tiefen Kastenpotentials

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| < b \\ 0 & \text{für } |x| \geq b, \end{cases}$$

wobei die Tiefes des Topfes mit der Breite durch

$$V_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{16 m b^2} > 0$$

verknüpft ist. Gegeben ist die folgende auf 1 normierte Wellenfunktion

$$\psi(x) = A \begin{cases} \cos(k_1 x) & \text{für } |x| < b \\ \cos(k_1 b) \exp[-\kappa_2(|x| - b)] & \text{für } |x| \geq b. \end{cases}$$

Dabei ist

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{(\pi + 4)b}}, \quad k_1 = \kappa_2 = \frac{\pi}{4b}.$$

(a) Erfüllt die oben angegebene Wellenfunktion bei $x = \pm b$ die erforderlichen Stetigkeitsbedingungen für eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung?

(b) Zeigen Sie, daß die oben angegebene Wellenfunktion ein Energieeigenzustand ist und berechnen Sie den Energieeigenwert, indem Sie $\hat{H}\psi(x)$ ausrechnen.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Teilchen außerhalb des Potentialtopfes (d.h. im „klassisch verbotenen Bereich“ bei $|x| > b$) aufhält?

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Betrachten Sie wieder den endlich tiefen Potentialtopf.

(a) Wie lautet allgemein die Orts-Impuls-Unschärferelation?

(b) Der Grundzustand ist eine gerade Wellenfunktion, d.h. $\psi_1(x) = \psi_1(-x)$. Was bedeutet dies für die Erwartungswerte von Ort und Impuls?

(c) Schätzen Sie die Impulsunschärfe Δp unter der Annahme ab, daß die Ortsunschärfe $\Delta x \simeq 2b$ ist.

(d) Welche untere Schranke ergibt sich daraus für die Grundzustandsenergie?

(e) Begründen Sie aufgrund dieser Überlegungen, warum der in der klassischen Theorie niedrigstmögliche Energiewert $E_{\text{min, klass}} = -V_0$ kein quantenmechanischer Energieeigenwert sein kann.

Aufgabe 7 (12 Punkte)
In effektiven Modellen für Streuprozesse (z.B. in der Kernphysik) werden komplexe Potentiale $V(\vec{x}) = V_1(\vec{x}) - \mathrm{i}V_2(\vec{x})$, wobei $V_1, V_2 \in \mathbb{R}$ und $V_2 \geq 0$ ist, verwendet, d.h. in die Schrödingergleichung geht der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}_{\vec{x}}^2 + V_1(\vec{x}) - \mathrm{i}V_2(\vec{x})$$

ein.

(a) Ist dieser Hamiltonoperator linear? Ist er hermitesch? Begründen Sie kurz Ihre Antworten.

(b) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung her! Was ändert sich gegenüber dem Fall rein reeller Potentiale?

(c) Was ergibt sich daraus für die Wahrscheinlichkeitsdichte ϱ? Interpretieren Sie Ihr Resultat für den Fall $V_2 \geq 0$.

Aufgabe 8 (3 Punkte)
Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!
„Jeder erlaubte Zustand wird durch eine Wellenfunktion beschrieben, die $\hat{H}\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$ mit $E \in \mathbb{R}$ erfüllt.“

Formeln

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x\, x\cos(ax) &= \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}, \\
\int \mathrm{d}x\, x^2\cos(ax) &= \frac{2x\cos(ax)}{a^2} + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin(ax), \\
\int \mathrm{d}x\, x\sin(ax) &= \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}, \\
\int \mathrm{d}x\, x^2\sin(ax) &= \frac{2-a^2x^2}{a^3}\cos(ax) + \frac{2x\sin(ax)}{a^2}.
\end{aligned}$$