Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 7 **08.06.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 15.06.2009**

Präsenzaufgabe 10 (Eindimensionale Streutheorie)

Wir betrachten die zeitunabhängige Streutheorie für eindimensionale Probleme aus der Vorlesung aus einem etwas anderen Blickwinkel. Wir nehmen dazu an, daß für das Potential $V(x) = 0$ für $|x| > a$ gilt. Wir betrachten wieder Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung, die wir nun in der Form

$$u_E''(x) + \epsilon u_E(x) = U(x) u_E(x) \text{ mit } \epsilon = 2mE/\hbar^2, \quad U(x) = 2mV(x)/\hbar^2. \tag{1}$$

schreiben wollen.

Es sei $G_0(x, x')$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \epsilon\right) G_E(x, x') = \delta(x - x'). \tag{2}$$

G_0 heißt Greensche Funktion der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für ein freies Teilchen.

(a) Zeigen Sie, daß dann für $\epsilon > 0$ jede Lösung der Integralgleichung

$$u_E(x) = \phi_E(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' G_E(x, x') U(x') u_E(x') \tag{3}$$

auch (1) erfüllt, wenn ϕ_E eine beliebige Lösung der entsprechenden Gleichung für freie Teilchen, also

$$\phi_E''(x) + \epsilon \phi_E(x) = 0 \tag{4}$$

ist. Beweisen Sie weiter, daß zu jeder Lösung von (1) eine Lösung ϕ_E zu (4) existiert, so daß (3) gilt.

(b) Zeigen Sie, daß eine mögliche Greensche Funktion durch

$$G_E(x, x') = \frac{1}{2\mathrm{i}k} \left\{\Theta(x - x') \exp[\mathrm{i}k(x - x')] + \Theta(x' - x) \exp[\mathrm{i}k(x' - x)]\right\} \tag{5}$$

mit $k = \sqrt{\epsilon}$ gegeben ist. Zeigen Sie dazu, daß (5) für $x \neq x'$ die Gl. (2) erfüllt ist und daß sie die Randbedingungen für $x \to x' \pm 0^+$, die sich durch Integration von (2) über ein infinitesimales Intervall $x \in (x' - \eta, x' + \eta)$ und der Stetigkeit von G_E ergeben.

(c) Welche formale Beziehung zwischen Reflexions- bzw. Transmissionsamplitude und der Lösung $\psi_E(x)$ ergibt sich. Wählen Sie die freie Lösung $\phi_E(x) = \exp(\mathrm{i}kx)$ mit $k = \sqrt{\epsilon}$.

(d) Ein wichtiges Näherungsverfahren, die **Bornsche Reihe**, ergibt sich, wenn man (3) rekursiv löst, wobei durch die Wahl der freien Lösung ϕ_E bereits die physikalischen Randbedingungen festgelegt werden können. Dazu setzt man anfangs $u_E = \phi_E$ und iteriert dann Gl. (3), d.h. man hat folgende Rekursion

$$u_E^{(0)}(x) = \phi_E(x), \quad u_E^{(n+1)}(x) = \phi_E(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' G_E(x, x') U(x') u_E^{(n)}(x'). \tag{6}$$

Schreiben Sie die Näherung $u_E^{(1)}$ mit der Wahl $\phi_E = \exp(\mathrm{i}kx)$ explizit auf!

(e) Wie lauten die Näherungen für die Reflexions- und Transmissionsamplituden in erster Ordnung im Potential $U(x)$?

Hausübung 10 (Geiger-Nutallsche Formel)
In der Vorlesung wurde die Tunnelwahrscheinlichkeit für ein α-Teilchen aus einem Atomkern der Kernladungszahl Z hergeleitet:

$$\ln \frac{T}{T_0} = -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_c} \mathrm{d}r \sqrt{2m_\alpha \left(\frac{2e^2 Z'}{r} - E_\alpha\right)}. \tag{7}$$

Dabei ist $Z' = Z - 2$ die Kernladungszahl des Tochterkerns, m_α die Masse des α-Teilchens, $e > 0$ die Elementarladung und schließlich E_α die Energie des α-Teilchens. Weiter ist R der Kernradius und R_c der zweite klassische Umkehrpunkt.

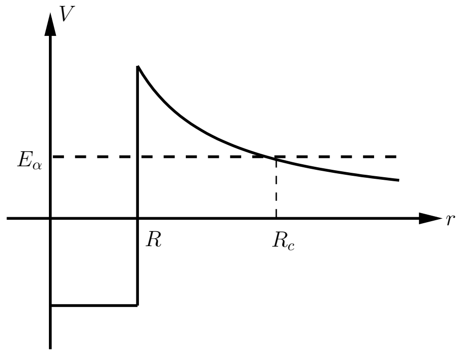

Abbildung 1: *Schematisches Kernpotential. Das α-Teilchen befindet sich anfangs im Bereich des anziehenden Kernpotentials. Klassisch könnte es nur bis zum Kernradius $r = R$ gelangen und würde dort reflektiert. Aufgrund des Tunneleffekts kann es aber auf die andere Seite der Potentialbarriere in den Bereich $r > R_c$ gelangen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist durch Gl. (7) gegeben (s. Vorlesung!).*

(a) Berechnen Sie den Umkehrpunkt R_c der klassischen Bewegung eines α-Teilchens (im Bereich $r > R_c$!) als Funktion der α-Teilchenenergie E_α.

(b) Werten Sie das Integral (7) aus. Substituieren Sie dazu $r = R_c \sin^2 \theta$.

(c) Zeigen Sie, daß sich für $E_\alpha \leq 2Z'e^2/R$ die Näherung

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = -\frac{AZ'}{\sqrt{E_\alpha}} + BZ'^{2/3} \tag{8}$$

ergibt, wobei $R \propto Z'^{1/3}$ benutzt wurde. Dabei sind A und B Konstanten, die unabhängig vom Tochterkern und von E_α sind.

Bemerkung: Nimmt man an, daß das α-Teilchen im Kern vorgeformt ist und sich im Potentialtopf, der aus Kernkräften und Coulombpotential des Tochterkerns gebildet wird und die mittlere Zeit zwischen zwei Reflexionen des α-Teilchens an der Potentialbarriere ist, ergibt sich als mittlere Lebensdauer des α-Strahlers

$$\tau = \frac{\tau_0}{T}. \tag{9}$$

Damit entspricht (8) dem schon 1911 empirisch gefundenen Gesetz, wonach der Logarithmus des Lebensdauer (bzw. Halbwertszeit) eines α-Strahlers $\propto 1/\sqrt{E_\alpha}$ ist. Die entsprechende Formel stimmt mit den empirischen Daten erstaunlich gut überein, wenn man die vielen Vereinfachungen, die diesem **Gamov-Modell** des α-Zerfalls zugrundeliegen.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`