Prof. U. Mosel, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2009**

Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 6 **25.05.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 08.06.2009**

Präsenzaufgabe 9 (Neutronen im Gravitationsfeld)

Wir betrachten die zeitunabhängige Schrödingergleichung, also die Energieeigenwertgleichung für Neutronen im Gravitationsfeld der Erde. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + mg\hat{x}_3. \tag{1}$$

Allerdings ist die Energieeigenwertgleichung nicht mit elementaren Funktionen lösbar. Schreibt man aber die Wellenfunktion als Fouriertransformierte in der Form

$$\psi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}\right)\phi(\vec{p}), \tag{2}$$

ergibt sich eine elementar lösbare Gleichung für $\phi(\vec{p})$.

(a) Bestimmen Sie dazu zunächst, wie Orts- und Impulsoperatoren sich auf die Fouriertransformierte $\phi(\vec{p})$ auswirken. Wenden Sie dazu $\hat{\vec{x}}$ bzw. $\hat{\vec{p}}$ auf die Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ an und drücken Sie dann in dem Ansatz (2) alle Operationen unter dem Integral durch Operationen bzgl. $\vec{p}$ aus.

(b) Schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\hat{H}\phi_E(\vec{p}) = E\phi_E(\vec{p}) \tag{3}$$

mit dem in (1) gegebenen Hamiltonoperator hin.

(c) Zur Lösung der entstehenden Differentialgleichung machen Sie den Separationsansatz

$$\phi_E(\vec{p}) = \phi_1(p_1)\phi_2(p_2)\phi_3(p_3) \tag{4}$$

und leiten voneinander unabhängige Gleichungen für ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 her.

(d) Zeigen Sie, daß spezielle Lösungen der Form

$$\phi_E(\vec{p}) = \delta(p_1)\delta(p_2)\phi_3(p_3) \tag{5}$$

existieren und lösen Sie die verbleibende Gleichung für ϕ_3. Welcher Bewegung von Neutronen entspricht diese Lösung? Welche möglichen Eigenwerte für E existieren? Welcher Wahl eines vollständigen Satzes kompatibler Observabler entspricht diese Lösung?

(e) Setzen Sie nun in (2) die gefundene Lösung für $\phi(\vec{p})$ ein und berechnen Sie die Integrale bzgl. p_1 und p_2. Zeigen Sie für das verbleibende Integral, daß für diese Energieeigenfunktionen gilt

$$\psi_E(\vec{x}) = \psi_{E=0}(x_1, x_2, x_3 - z_E) \tag{6}$$

und bestimmen Sie z_E.

(f) Am Institut Laue-Langevin in Grenoble hat man Neutronen durch eine Anordnung geschickt, bei der die Neutronen über einem für sie idealen Spiegel bei $z = 0$ positioniert wurden, d.h. für diese Neutronen ändert sich das Potential zu

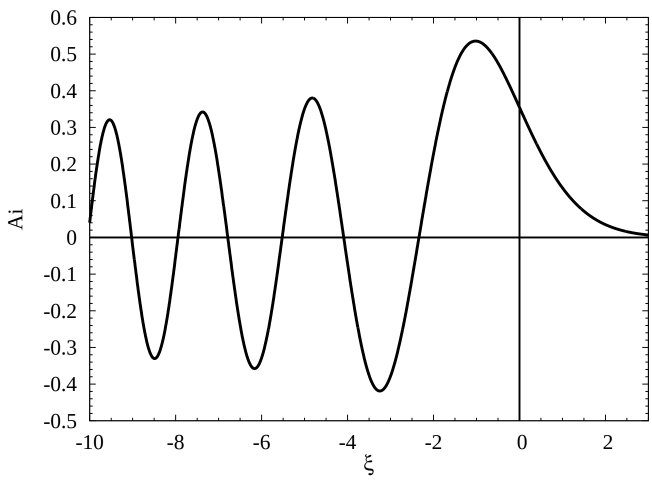
$$V(\vec{x}) = \begin{cases} mgx_3 & \text{für } x_3 \geq 0 \\ \infty & \text{für } x_3 < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Welche Zusatzforderung ergibt diese Änderung für die Energieeigenfunktion $\psi_E(\vec{x})$? Was bedeutet dies für die möglichen Energieeigenwerte?

(g) Berechnen Sie die ersten drei niedrigsten Energieeigenwerte. Dazu dürfen Sie die Eigenschaften der Airyfunktion verwenden, die die Fourierdarstellung

$$\mathrm{Ai}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \exp\left(\frac{\mathrm{i}k^3}{3} + \mathrm{i}k\xi\right) \tag{8}$$

besitzt.



Setzen Sie dazu (8) in Beziehung zu dem verbliebenen Integral in (6). Sie benötigen noch die betragsmäßig kleinsten Nullstellen der Airyfunktion: -2.338, -4.088, -5.521.

In dem besagten Experiment[1] ist es gelungen, den Wert des niedrigsten Energieniveaus zu bestätigen. Welcher Wert ergibt sich aus Ihren obigen Rechnungen? Die Neutronen haben eine Masse von $m = 1.675 \cdot 10^{-27}$ kg, und die Fallbeschleunigung ist $g = 9.81$ m/s^2. Außerdem ist $\hbar = h/(2\pi) = 1.054 \cdot 10^{-34}$ Js. Es ist sinnvoll, die Energien in der in der Atom- und Teilchenphysik üblichen Einheit eV (Elektronenvolt) anzugeben. Es gilt 1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-16}$ V.

[1] V. V. Nevizhevsky et al, Nature **415**, 297 (2002),
http://www.nature.com/nature/journal/v415/n6869/abs/415297a.html;
V. V. Nevizhevsky et al, Phys. Rev. D **67**,102002 (2003),
http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.102002.

Hausübung 8 (Operatorexponentialfunktion)
Für einen beliebigen Operator $\hat{A}$ ist die Exponentialfunktion durch die (formale) Potenzreihe

$$\exp(\hat{A}) = \mathbb{1} + \hat{A} + \frac{\hat{A}^2}{2!} + \frac{\hat{A}^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^k}{k!} \tag{9}$$

definiert.

(a) Berechnen Sie die Wirkung des Operators

$$\hat{T}_{\vec{\xi}} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{\xi}\cdot\hat{\vec{p}}\right), \tag{10}$$

auf eine (als beliebig oft stetig differenzierbar angenommene) Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$. Bestimmen Sie daraus den inversen Operator $\hat{T}_{\vec{\xi}}^{-1}$.

(b) Zeigen Sie, daß $\hat{T}_{\vec{\xi}}$ unitär ist, d.h. daß für irgendwelche Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2

$$\left\langle \hat{T}_{\vec{\xi}}\psi_1 \middle| \hat{T}_{\vec{\xi}}\psi_2 \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x [\hat{T}_{\vec{\xi}}\psi_1(\vec{x})]^* \hat{T}_{\vec{\xi}}\psi_2(\vec{x}) = \langle \psi_1 \,|\, \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \psi_1^*(\vec{x})\psi_2(\vec{x}) \tag{11}$$

gilt. Berechnen Sie unter Verwendung der Potenzreihendefinition der Exponentialfunktion den adjungierten Operator $\hat{T}_{\vec{\xi}}^{\dagger}$.

(c) Zeigen Sie daß ein allgemeiner Operator $\hat{U}$, für den $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ gilt, unitär ist.

(d) Sei $\hat{A}$ ein *hermitescher* Operator. Beweisen Sie, daß dann

$$\hat{U} = \exp(\mathrm{i}\hat{A}) \tag{12}$$

unitär ist, indem Sie zeigen, daß

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{1} \tag{13}$$

ist.

Freiwillige Knobelaufgabe
Untersuchen Sie mit Hilfe der Potenzreihendefinition der Exponentialfunktion (4), unter welchen Bedingungen für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die Gleichung

$$\exp(\hat{A}+\hat{B}) \stackrel{?}{=} \exp(\hat{A})\exp(\hat{B}) \tag{14}$$

gilt.

Hausübung 9
Bereiten Sie sich auf die Klausur am 06. Juni um 10:00h vor!

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`