Übungen zur Quantenmechanik I

Blatt 5 **18.05.2009, Abgabetermin für Hausübungen: 25.05.2009**

Präsenzaufgabe 8 (Drehimpulsoperatoren)

In der Vorlesung wurden die Kommutatorrelationen

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}; \quad i,j \in \{1,2,3\} \tag{1}$$

bewiesen. Wir betrachten den Bahndrehimpulsoperator

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}, \tag{2}$$

dessen Komponenten mit Hilfe des total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbols

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i,j,k) \text{ gerade Permutation von } (1,2,3), \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

in der Form

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k \tag{4}$$

geschrieben werden kann. Dabei wird über in einem Ausdruck doppelt auftretenden Indizes stillschweigend von 1–3 summiert (Einsteinkonvention).

(a) Zeigen Sie, daß für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ die Formeln

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] &= \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}, \\ \left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] &= \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] \end{aligned} \tag{5}$$

gelten.

(b) Verwenden Sie die gerade bewiesenen Formeln, um aus der Definition der Drehimpulskomponenten (4) die Kommutatorrelationen

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{6}$$

zu beweisen. Was bedeutet dies im Hinblick auf die simultane Meßbarkeit von Drehimpulskomponenten?

(c) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_i\right]$.

(d) Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einem Zentralpotential

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(r) \tag{7}$$

mit dem Drehimpulsoperator $\hat{\vec{L}}$ kommutiert.

Hausübung 7 (Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten)
Wir führen Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$x = r \cos\varphi \, \sin\vartheta, \quad y = r \sin\varphi \, \sin\vartheta, \quad z = r \cos\vartheta \tag{8}$$

ein.

(a) Drücken Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen in einem Zentralpotential $V(r)$ mit $r = |\vec{x}|$

$$\hat{H}\psi(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x}) + V(r)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \tag{9}$$

in Kugelkoordinaten aus.

(b) Zeigen Sie, daß der Hamiltonoperator in der Form

$$\hat{H}\psi(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\,\psi(\vec{x})}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2mr^2}\psi(\vec{x}) + V(r)\psi(\vec{x}) \tag{10}$$

geschrieben werden kann, indem Sie $\hat{\vec{L}}^2$ in Kugelkoordinaten ausdrücken.

Betrachten Sie nun das klassische Analogon, und schreiben Sie ausgehend von der Lagrangefunktion die Hamiltonfunktion in Kugelkoordinaten um. Was käme für den quantenmechanischen Hamiltonoperator heraus, wenn Sie einfach naiv „kanonisch quantisieren"?

(c) Rechnen Sie $\hat{L}_3$ in Kugelkoordinaten um.

Hinweise:
Die orthogonalen Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten sind

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \vec{e}_x \cos\varphi \, \sin\vartheta + \vec{e}_y \sin\varphi \, \sin\vartheta + \vec{e}_z \cos\vartheta, \\
\vec{e}_\vartheta &= \vec{e}_x \cos\varphi \, \cos\vartheta + \vec{e}_y \sin\varphi \, \cos\vartheta - \vec{e}_z \sin\vartheta, \\
\vec{e}_\varphi &= -\vec{e}_x \sin\varphi + \vec{e}_y \cos\varphi.
\end{aligned} \tag{11}$$

Sie bilden in dieser Reihenfolge eine rechtshändige Basis, d.h. es gilt

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi \tag{12}$$

und die entsprechenden Formeln, die daraus durch zyklische Permutation der Indizes r, ϑ, φ hervorgehen.
Die Formeln für den Nabla- und den Laplaceoperator lauten in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\
\Delta = \vec{\nabla}^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://theorie.physik.uni-giessen.de/~hees/qm1-ss09/`