Vorlesung SRT am 10.06.2014 (1)

Wiederholung: Vierer-Vektoren

- Raum-Zeit-Koordinaten

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

- Minkowski-Produkt:

$$x \cdot y = x^0 \cdot y^0 - \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\text{Skalarprodukt } x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3}$$

- Indefinites "Pseudo-Skalarprodukt"

$$x \cdot x = x^2 \begin{cases} < 0 & \text{raumartig} \\ = 0 & \text{lichtartig} \\ > 0 & \text{zeitartig} \end{cases}$$

x raumartig $\Rightarrow$ kann nicht kausal mit Ursprung verknüpft sein, weil Vorzeichen der Zeitkomponente in neuem BS anders sein kann

- invariante Eigenzeit für (massive) Punktteilchen

$$x = x(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix} \leftarrow \text{Trajektorie}$$

Zeitkomponente ändert sich unter Lorentz-Trafos

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = c^2 - \dot{\vec{x}}^2 = c^2 - \vec{v}^2 > 0 \quad (\text{zeitartig})$$

Dann Eigenzeit-Inkrement

$$c^2 d\tau^2 = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} dt^2 = c^2 (1 - \vec{\beta}^2) dt^2 \; ; \; \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\vec{\beta}^2} > 0$$

$d\tau$: Zeitinkrement im instantanen Ruhesystem des Teilchens, denn wenn $\vec{\beta}' = 0$ im Bezugssystem Σ', dann $dt' = d\tau$.

Kovariante Kinematik

$x = x^\mu(\tau)$ Vierer-Vektor

Da $d\tau$ Lorentz-Invariante

$\Rightarrow u = \dfrac{dx}{d\tau}$ auch Vierer-Vektor (kovariante Geschw.)

Aus definition der Eigenzeit:

$$\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{dx}{d\tau} = u\cdot u = u_\mu u^\mu = c^2,$$

denn: $d\tau^2 = \dfrac{1}{c^2}\, dx\cdot dx \Rightarrow \dfrac{1}{c^2}\, u\cdot u = 1$

Nullkomponente:

$$(u^0)^2 - \vec{u}^2 = c^2 \Rightarrow u^0 = \sqrt{c^2+\vec{u}^2}$$

Andererseits gilt

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} = \frac{\vec{\beta}c}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}$$

$$\Rightarrow \cancel{(u^0)^2 = \frac{c^2 + c^2\vec{\beta}^2}{1-\beta}}$$

Lorentz-Fa

$$(u^0)^2 = c^2 + \frac{\vec{\beta}^2 c^2}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}^{\,2}} = \frac{c^2}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}^{\,2}} \overset{u^0>0!}{\Rightarrow} u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} =$$

Dreier-Geschwindigkeit

$\vec{v} = c\vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{u^0}$ ($\curvearrowright$ kein Raumanteil eines Vierer-Vektors!)

Relativistische Energie und Impuls

In Newtonscher Mechanik

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{(Newtonsche Näherung!)}$$

Relativistische Verallgemeinerung: Vierer-Impuls

$$p = (p^\mu) = m \cdot u = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} \cong m\vec{v}\left[1 + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^4)\right]$$

$\Rightarrow$ Nichtrelativistischer Grenzfall $\Leftrightarrow$ Vernachlässigung von Größen der $O(\beta^2)$!

Null-Komponente:

$$p^0 = m\gamma c = mc\left(1 + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^4)\right)$$

$$= mc + \frac{m}{2}v^2 \cdot \frac{1}{c} + \dots$$

$$= \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \dots\right)$$

Bis auf additive Konstante mc^2 ist das im NR Limes die kinetische Energie$/c$!

$$\Rightarrow E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$$

NB: Verwende hier immer kovariante Definitionen für die mit Teilchen verbundenen Größen!
Hier z.B. m: Skalar "invariante Masse"
Früher wurde auch die nicht kovariante Größe

$$m_{rel} = m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

eingeführt, so daß

$$E = m_{rel} c^2, \quad \vec{p} = m_{rel} \vec{v}$$

Führt aber oft zu Mißverständnissen

Dynamik

Newton: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (Kraft) (NR!)

Relativistische Verallgemeinerung: Minkowski-Vierkraft

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu$$

Vier Bewegungsgleichungen $\Rightarrow$ 1 muß redundant sein
Das folgt aus Nebenbedingung

$$p \cdot p = m^2 u \cdot u = m^2 c^2 = \text{const}$$

$$\overset{\frac{d}{d\tau}}{\Rightarrow} 2p \cdot \frac{dp}{d\tau} = 0 \Rightarrow p \cdot K = 0$$

$\Rightarrow$ Muß Gln. $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{K}$ lösen

Dann folgt aus

$$p \cdot K = 0 \Rightarrow p^0 K^0 = \vec{p} \cdot \vec{K}$$

$$\Rightarrow K^0 = \frac{c\vec{p}}{E} \cdot \vec{K} = \vec{\beta} \cdot \vec{K}$$

denn $E = c p^0 = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$

Bezug zur gewöhnlichen Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{\gamma}\vec{K}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{K} = \gamma \vec{F}}$$

$\vec{F}$ ist nicht räumlicher Anteil eines Vierervektors

Nullkomponente der Bewegungsgleichung

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{\gamma}K^0 = \frac{1}{\gamma}\vec{\beta}\cdot\vec{K} = \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = c\frac{dp^0}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}}$$

$\Rightarrow$ Energie $E = p^0 c = m c^2 \gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}$ hat übliche Bedeutung der Mechanik, denn $\vec{v}\cdot\vec{F}$ ist die Leistung am Teilchen aufgrund der Kraft $\vec{F}$

NB: Problematik von Wechselwirkungskräften

Newtonsches Gravitationsgesetz ist typisches Beispiel für Fernwirkungstheorie

$$\dot{\vec{p}}_1 = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$\dot{\vec{p}}_2 = -\gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Kraft auf Teilchen 1 ändert sich instantan, wenn Teilchen 2 seine Position ändert. Das bedeutet instantane Signalausbreitung
$\Rightarrow$ akausal in Minkowski-Raumzeit!

<u>Ausweg:</u> Feld-Standpunkt (Nahwirkung). Teilchen 2 ist Ursache für Feld bei Teilchen 1. Feldänderungen breiten sich maximal mit c aus. Bsp: Retardierte em. Felder (Lienard-Wiechert-Potentiale) in der klassischen E-Dynamik

i.a. hängen Kräfte von Ort und Impuls (oder Geschwindigkeit) des Teilchens ab.

<u>Beispiel:</u> Elektromagnetische Kraft auf Punktladung in äußerem Feld:

Lorentz-Kraft in Gauß- bzw. Heaviside-Lorentz-Einheiten*

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{K} = \gamma \vec{F} = q\gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = \frac{q}{c}\left(u^0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right)$$

$$K^0 = \vec{\beta}\cdot\vec{K} = \frac{q}{c} u^0 \vec{\beta}\cdot\vec{E} = \frac{q}{c}\vec{u}\cdot\vec{E}$$

Da $K = \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix}$ Vierervektor ist und die Ladung q invariant sein soll, muß

$$K^\mu = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu$$

mit einem Tensor $F^\mu{}_\nu$ sein.

---

* besser geeignet für theoretische Physik, weil $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gleiche Dimension haben, was relativistisch sinnvoll ist (s.u.)

Kovariante Form

$$K^\mu = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu \, u^\nu$$

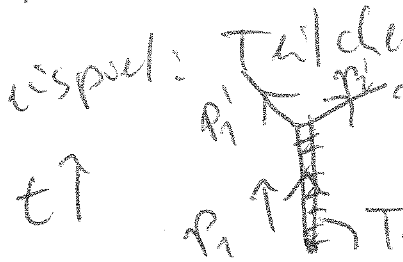
mit: $$\left(F^\mu{}_\nu\right) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Feldstärketensor $\Rightarrow$ später: kovariant formulierte Maxwell-Elektrodynamik!

Energie-Impulserhaltung

Wie in klassischer Mechanik Energie und Impuls erhalten
$\Rightarrow$ Noether-Theorem (später!)

Beispiel: Teilchenzerfall



zerfällt in zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2

Teilchen mit Masse M

Vierdimensionale Überlegung aus E-$\vec{p}$-Erhaltung führt auf Kinematik. Am einfachsten im Bezugssystem, wo Teilchen 1 anfangs ruht.

Viererimpulse

$$p_1 = \begin{pmatrix} Mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad p_1' = \begin{pmatrix} E_1'/c \\ \vec{p}_1{}' \end{pmatrix}$$

$$p_2' = \begin{pmatrix} E_2'/c \\ \vec{p}_2{}' \end{pmatrix}$$

$$(p_1 - p_1')^2 = p_2'^2 = m_2^2 c^2$$

$$\cancel{= m_1^2}$$

$$= M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2 M E_1'$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1' = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2}$$

cm-Impuls

$$E_1'^2 = m_1^2 \cancel{c^4}^{\,c^2} + \cancel{c^2}\, \vec{p}_{cm}^{\,2}$$

$$= \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2} \cancel{c^4}\, c^2$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{cm}^{\,2} = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4 M^2 m_1^2}{4M^2} c^2$$

$$= \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2 M m_1)(M^2 + m_1^2 - m_2^2 + 2M}{4M^2}$$

$$= \frac{[(M + m_1)^2 - m_2^2] \cdot [(M - m_1)^2 - m_2^2]}{4M^2} c^2$$

$$\cancel{\vec{p}_{cm}^{\,2} = (M_1 + m_1 - m_2)(M_1 + m_1 + m_2)}$$

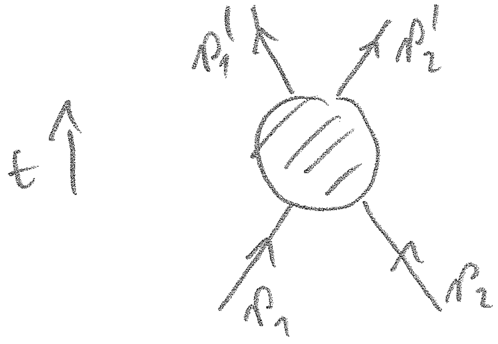
$$\vec{p}_{cm}^{\,2} = \frac{(M+m_1+m_2)(M+m_1-m_2)(M-m_1+m_2)(M-m_1-m_2)}{4M^2}\, c^2$$

$$= \frac{\left[M^2-(m_1+m_2)^2\right]\left[M^2-(m_1-m_2)^2\right]}{4M^2}\, c^2$$

$\Rightarrow$ "Schwelle" $M \geq m_1 + m_2$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{p}_{cm}| = \frac{\sqrt{\left[M^2-(m_1+m_2)^2\right]\left[M^2-(m_1-m_2)^2\right]}}{2M}\, c}$$

2 → 2 – Streukinematik



Invarianten

$$p_1^2 = m_1^2 c^2 \,;\; p_2^2 = m_2^2 c^2$$

$$p_1'^2 = m_1'^2 c^2 \,;\; p_2'^2 = m_2'^2 c^2$$

Energie-Impuls-Erhaltung

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

Mandelstam-Variablen

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2$$

$$t = (p_1 - p_1')^2 = (p_2 - p_2')^2$$

$$u = (p_1 - p_2') = (p_2 - p_1')^2$$

$$\begin{aligned} s + t + u = {} & m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 p_1 \cdot p_2 \\ & + m_1^2 c^2 + m_1'^2 c^2 - 2 p_1 \cdot p_1' \\ & + m_1^2 c^2 + m_2'^2 c^2 - 2 p_1 \cdot p_2' \\ = {} & (3 m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2) c^2 \\ & + 2 \underbrace{(p_2 - p_1' - p_2')}_{-p_1} \cdot p_1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{s + t + u = (m_1^2 + m_2^2 + m_1'^2 + m_2'^2)\, c^2}$$

Labor-System

Schwerpunkts-System

$\vec{p}_2^{(lab)} = 0$

$\vec{p}_1^{(CM)} + \vec{p}_2^{(CM)} = \vec{p}_1^{\,\prime(CM)} + \vec{p}_2^{\,\prime(CM)} =$

$$\Rightarrow p_1^{(CM)} + p_2^{(CM)} = \begin{pmatrix} (E_1^{(CM)} + E_2^{(CM)})/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{c^2}\left(E_1^{(CM)} + E_2^{(CM)}\right)^2 \Rightarrow \boxed{E_{tot}^{(CM)} = \sqrt{s}\cdot c}$$

$$s = (m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2\, p_1^{(CM)} p_2^{(CM)}$$

$$= (m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2\left[\frac{E_1^{(CM)} E_2^{(CM)}}{c^2} + \left(\vec{p}_1^{(CM)}\right)^2\right]$$

$$= (m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2\left[\frac{E_1^{(CM)} E_2^{(CM)} + (E_1^{(CM)})^2}{c^2} - m_1^2 c^2\right]$$

$$= (m_2^2 - m_1^2)c^2 + 2\,\frac{E_1^{(CM)}}{c}\sqrt{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1^{(CM)} = \frac{s + (m_1^2 - m_2^2)c^2}{2\sqrt{s}}\, c}$$

Rechnung symmetrisch unter Vertauschung von $p_1 \Leftrightarrow p_2$

$$\Rightarrow \boxed{E_2^{(CM)} = \frac{s + (m_2^2 - m_1^2)c^2}{2\sqrt{s}}\, c}$$

und: $p_1 \to p_1'$; $p_2 \to p_2'$

$$E_1^{(CM)\prime} = \frac{s + (m_1'^2 - m_2'^2)c^2}{2\sqrt{s}}\, c \;;\quad E_2^{(CM)\prime} = \frac{s + (m_2'^2 - m_1'^2)c^2}{2\sqrt{s}}\, c$$

$$|\vec{p}_1^{\,(CM)}|^2 = \frac{E_1^{(CM)2}}{c^2} - m_1^2 c^2$$

$$= \frac{[s + (m_1^2 - m_2^2)c^2]^2 - 4 m_1^2 c^2 s}{4s}$$

$$= \frac{s^2 + 2(m_1^2 - m_2^2)c^2 s + (m_1^2 - m_2^2)^2 c^4 - 4m_1^2 c^2 s}{4s}$$

$$= \frac{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)c^2 s + (m_1^2 - m_2^2)^2 c^4}{4s}$$

$$= \frac{s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)c^2 s + (m_1^4 - 2m_1^2 m_2^2 + m_2^4)c^4}{4s}$$

$$= \frac{[s - (m_1^2 + m_2^2)c^2]^2 - (2m_1 m_2)^2 c^4}{4s}$$

$$\boxed{|\vec{p}_1^{\,(CM)}|^2 = |\vec{p}_2^{\,(CM)}|^2 = \frac{[s - (m_1 + m_2)^2 c^2][s - (m_1 - m_2)^2 c^2]}{4s}}$$

Analog mit p_1' und p_2':

$$\boxed{|\vec{p}_1^{\,(CM)\prime}|^2 = |\vec{p}_2^{\,(CM)\prime}|^2 = \frac{[s - (m_1' + m_2')^2 c^2][s - (m_1' - m_2')^2 c^2]}{4s}}$$

Labor-System

$$s = (p_1 + p_2)^2 = \left(\frac{E_1^{(Lab)}}{c} + m_2 c \right)^2 - \left(\vec{p}_1^{\,(Lab)} \right)^2$$

$$= (m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2 E_1^{(Lab)} m_2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1^{(Lab)} = \frac{s - (m_1^2 + m_2^2) c^2}{2 m_2}}$$

$$\left(\vec{p}_1^{\,(Lab)} \right)^2 = \frac{E_1^{(Lab)2}}{c^2} - m_1^2 c^2$$

$$= \frac{\left[s - (m_1^2 + m_2^2) c^2 \right]^2 - 4 m_1^2 m_2^2 c^4}{4 m_2^2 c^2}$$

$$= \frac{\left[s - (m_1 + m_2)^2 c^2 \right] \left[s - (m_1^2 - m_2^2) c^2 \right]}{4 m_2^2 c^2}$$

$$\boxed{\left| \vec{p}_1^{\,(Lab)} \right|^2 = \frac{s}{m_2^2 c^2} \, p_1^{(CM)}}$$