

Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 13: Thermische Feldtheorie

Hendrik van Hees

15. Juli 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Thermische Feldtheorie (Matsubara-Formalismus)	1
2	Thermische Feldtheorie (Schwinger-Keldysh-Formalismus)	12
3	Erzeugende Funktionale (Störungsrechnung)	15
4	Φ-Funktionaltheorie	20
5	Transportgleichungen	23
6	Anhang: Gauß-Integration	28
7	Anhang: Berechnung von Matsubara-Summen	29
8	Literatur	31

1 Thermische Feldtheorie (Matsubara-Formalismus)

Thermische Feldtheorie (Matsubara-Formalismus)

Literatur: [\[KG06, LeB96, LV16, Hee17, Lv87, CSHY85\]](#)

Erinnerung: großkanonisches Potential

- System, gekoppelt an „Wärmebad“
- Austausch von Energie und (erhaltenen) Ladungen mit Wärmebad möglich
- Statistischer Operator

$$\hat{R} = \frac{1}{Z} \exp[-\beta(\mathbf{H} - \mu \mathbf{Q})], \quad Z = \text{Tr} \exp[-\beta(\mathbf{H} - \mu \mathbf{Q})]$$

- $\beta = 1/T$ mit Temperatur T ; μ chemisches Potential zur erhaltenen Ladung Q
- Massieu-Funktion und Entropie

$$\Omega = \ln Z, \quad S = \Omega + \beta U - \beta \mu q$$

- **Landau-Potential**

$$\Phi(T, V, \mu) = -T\Omega = U - TS - \mu q$$

- V : Volumen des betrachteten Systems, das „Gas“ enthält
- in QFT: V „Quantisierungsvolumen“ (Würfel mit periodischen Randbedingungen für Felder)

$$d\Phi = -SdT - PdV - qd\mu \Rightarrow S = -\partial_T \Phi(T, V, \mu), \quad P = -\partial_V \Phi, \quad q = -\partial_\mu \Phi,$$

- P : Druck, q : (mittlere) Gesamtladung des Systems

Thermische Feldtheorie (Matsubara-Formalismus)

- betrachte wieder einfaches Modell mit **geladenem Skalarfeld** $\phi \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(|\phi|)$$

- invariant unter **globaler Phasentransformation**

$$\phi'(\underline{x}) = \exp(-i\chi)\phi(\underline{x}), \quad \phi^*(\underline{x}) = \exp(+i\chi)\phi^*(\underline{x}), \quad \chi = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

- $\Rightarrow$ erhaltene **Noether-Ladung**

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \phi^*(\underline{x}) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\underline{x}) = \text{const.}$$

- Quantisierung als **Bosonen**, kanonische Feldimpulse $\Pi = \dot{\phi}^*$, $\Pi^* = \dot{\phi}$
- $\Rightarrow$ **kanonische gleichzeitige Kommutatoren:**

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0, \\ [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= [\Pi^\dagger(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0, \\ [\phi(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] &= 0, \\ [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

- **Pfadintegralzugang:** Ziel Berechnung der **Zustandssumme**

$$Z = \text{Tr} \exp[-\beta(\mathbf{H} - \mu \mathbf{Q})]$$

- **Feldeigenvektoren**

$$\phi(x) |\phi, \phi^*, t\rangle = \phi(x) |\phi, \phi^*, t\rangle, \quad \phi^\dagger(x) |\phi, \phi^*, t\rangle = \phi^*(x) |\phi, \phi^*, t\rangle.$$

- **Zeitentwicklung**

$$\phi(t, \vec{x}) = \exp(i\mathbf{H}t) \phi(0, \vec{x}) \exp(-i\mathbf{H}t)$$

$\Rightarrow$

$$|\phi, \phi^*, t\rangle = \exp(i\mathbf{H}t) |\phi, \phi^*, 0\rangle.$$

- Ladungsoperator (in Weyl-Ordnung: kanonische Feldimpulsoperatoren links von Feldoperatoren)

$$\mathbf{Q} = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} (\Pi^\dagger \phi^\dagger - \Pi \phi).$$

- Kommutatoren (folgt auch daraus, dass $\mathbf{Q}$ Phasentransfos erzeugt)

$$[\mathbf{Q}, \phi(\underline{x})] = -\phi(x), \quad [\mathbf{Q}, \phi^\dagger(x)] = \phi^\dagger(x)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\mu\mathbf{Q}) \phi(x) \exp(+\beta\mu\mathbf{Q}) &= \exp(+\beta\mu) \phi(x), \\ \exp(-\beta\mu\mathbf{Q}) \phi^\dagger(x) \exp(-\beta\mu\mathbf{Q}) &= \exp(-\beta\mu) \phi^\dagger(x), \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\exp(\beta\mu\mathbf{Q}) |\phi, \phi^*\rangle = |\exp(-\beta\mu)\phi, \exp(+\beta\mu)\phi^*\rangle.$$

- Zustandssumme: berechne Spur mit **Feldoperatoreigenzuständen** (mit $t = 0$)

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H} + \beta \mu \mathbf{Q}) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \langle \phi, \phi^*, 0 | \exp(-\beta \mathbf{H} + \beta \mu \mathbf{Q}) | \phi, \phi^*, 0 \rangle.$$

- $\mathcal{N}$: von T und μ unabhängiger (indefinit) Faktor $\Rightarrow$ (physikalische irrelevant, s.u.)
- da $[\mathbf{Q}, \mathbf{H}] = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_0 \mathcal{D}\phi_0^* \langle \phi_0, \phi_0^*, 0 | \exp(\beta \mu \mathbf{Q}) \exp(-\beta \mathbf{H}) | \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_0 \mathcal{D}\phi_0^* \langle \exp(-\beta \mu) \phi_0, \exp(+\beta \mu) \phi_0^*, 0 | \exp(-\beta \mathbf{H}) | \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle \end{aligned}$$

- **Uminterpretation von β als „Imaginäre Zeit“:**

$$\langle \exp(-\beta \mu) \phi_0, \exp(+\beta \mu) \phi_0^*, 0 | \exp(\underbrace{-\beta \mathbf{H}}_{-i(-i\beta) \mathbf{H}}) = \langle \exp(\beta \mu) \phi_0, \exp(-\beta \mu) \phi_0^*, t = -i\beta |$$

$\Rightarrow$

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_0 \mathcal{D}\phi_0^* \langle \exp(-\beta \mu) \phi_0, \exp(+\beta \mu) \phi_0^*, t_f = -i\beta | \phi_0, \phi_0^*, t_i = 0 \rangle$$

- unter Funktionalintegral: **Übergangsmatrixelement für imaginäre Zeit**

$\Rightarrow$ **euklidisches Pfadintegral**

- substituiere $t = -i\tau$, $\tau \in [0, \beta]$ in Lagrangian
- **Lagrangian für euklidische Feldtheorie**

$$\mathcal{L}_E = -\mathcal{L}_{t=-i\tau} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi + V(|\phi|).$$

- mit euklidischen Vierervektoren $(\tau, \vec{x})$ und $x_\mu x_\mu = \tau^2 + \vec{x}^2$
- $d^4 x = -i d\tau d^3 \vec{x} = -i d_E^4 x \Rightarrow$ **Euklidische Wirkung:**

$$i \int d^4 \mathcal{L} \Rightarrow i \int d_E^4 x (-i) (-\mathcal{L}_E) = - \int d_E^4 x \mathcal{L}_E = -S_E[\phi, \phi^*].$$

- „Übergangsmatrixelement“ als Pfadintegral

$$\langle \exp(-\beta \mu) \phi_0, \exp(+\beta \mu) \phi_0^*, -i\beta | \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle = \mathcal{N} \int_{\text{KMS}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp[-S_E(\phi, \phi^*)]$$

- KMS: **Kubo-Martin-Schwinger-Randbedingungen** [Kub57, MS59]

$$\begin{aligned}\phi(\tau = \beta, \vec{x}) &= \exp(-\beta\mu)\phi_0(\vec{x}), & \phi^*(\tau = \beta, \vec{x}) &= \exp(+\beta\mu)\phi_0^*(\vec{x}), \\ \phi(\tau = 0, \vec{x}) &= \phi_0(\vec{x}), & \phi^*(\tau = 0, \vec{x}) &= \phi_0^*(\vec{x}).\end{aligned}$$

- **Pfadintegral für Zustandsumme**

$$Z = \mathcal{N} \int D\phi_0 D\phi_0^* \int_{\text{KMS}} D\phi D\phi^* \exp[-S_E(\phi, \phi^*)]$$

- **Freie Felder: relativistisches ideales geladenes Bosegas**

- kann berechnet werden, da dann **Gaußsches Funktionalintegral**

$$\mathcal{L}_E = (\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi$$

- Euklidische Wirkung

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}_E = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi^*(-\square_E + m^2)\phi$$

- NB: partielle Integration im Wirkungsintegral auch für τ -Integral ohne Randterme wegen der quasiperiodischen KMS-Bedingungen!

→ Exkurs zu Gauß-Integralen (s. Anhang 6) ⇒ (alle evtl. auftretenden indefiniten Faktoren werden in $\mathcal{N}$ zusammengefasst):

- damit gilt formal

$$Z = \left[\det \left(\frac{-\square_E + m^2}{M^2} \right) \right]^{-1} = \exp \left[-\text{Tr} \ln \left(\frac{-\square_E + m^2}{M^2} \right) \right]$$

M : Energieskala, die Argument der Determinante dimensionslos macht; $\hat{=}$ indefiniter Konstante $\mathcal{N}$

- zur Berechnung der Spur: **löse Eigenwertproblem des Operators $-\square_E + m^2$**
- Eigenfunktionen müssen KMS-Bedingung erfüllen

$$(-\square_E + m^2)\varphi = \lambda\varphi, (-\square_E + m^2)\varphi^* = \lambda\varphi$$

- Fourier-Entwicklung
- bzgl. $\vec{x}$ zur Regularisierung „Box-Quantisierung“: Würfel der Kantenlänge L mit periodischen RBn für Felder ⇒ $\vec{p} \in (2\pi/L)\mathbb{Z}^3$

- bzgl. τ : **bosonische Matsubara-Frequenzen** $\omega \in (2\pi/\beta)\mathbb{Z}$ [Mat55]
- am Schluss der Rechnung wieder $L \rightarrow \infty$
- dann

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}$$

- dabei geht räumliche „Nullmode mit $\vec{p} = 0$ i.a. verloren, d.h. sie muss in Fourierdarstellung extra hingeschrieben werden:

$$\phi(x) = \underbrace{\xi \exp(-\mu\tau)}_{\varphi_0(\tau)} + \sqrt{\beta V} \sum_{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[(i\omega - \mu)\tau + i\vec{p} \cdot \vec{x}] \tilde{\phi}(\omega, \vec{p}),$$

$$\phi^*(x) = \underbrace{\xi^*(\omega) \exp(+\mu\tau)}_{\varphi_0^*(\tau)} + \sqrt{\beta V} \sum_{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[(-i\omega + \mu)\tau - i\vec{p} \cdot \vec{x}] \tilde{\phi}^*(\omega, \vec{p}),$$

- Normierungsfaktor so, dass $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^*$ dimensionslos sind
- Eigenwert der Nullmoden: $\lambda_0 = m^2 - \mu^2$
- übrige Eigenwerte:

$$\lambda(p) = -(i\omega - \mu)^2 + E_p^2, \quad E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

- damit *alle* Eigenwerte $\text{Re } \lambda > 0$ erfüllen, auch Nullmode $\Rightarrow \mu^2 < m^2$
 $\Rightarrow -m < \mu < m$
- Euklidische Wirkung:

$$S_E = \beta V (m^2 - \mu^2) \xi^* \xi + \sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \beta^2 [-(i\omega - \mu)^2 + E_p^2] \tilde{\phi}^*(\omega, \vec{p}) \phi(\omega, \vec{p})$$

- im Pfadintegral $\phi \rightarrow \varphi_0 + \phi', D\phi = D\phi', \phi^* \rightarrow \varphi_0 + \phi'^*, D\phi^* = D\phi'^*$
 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Omega = \ln Z &= \underbrace{-\beta V (m^2 - \mu^2) \xi^* \xi}_{\Omega_0} + \underbrace{\ln \left(\mathcal{N} / \det[\beta^2 (-\square_E + m^2)] \right)}_{\Omega'} \\ &= -\beta V (m^2 - \mu^2) \xi^* \xi - \text{Tr} \ln \det[\beta^2 (-\square_E + m^2)] - \ln \mathcal{N} \\ &= -\beta V (m^2 - \mu^2) \xi^* \xi - \sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \ln \left\{ \beta^2 [-(i\omega - \mu)^2 + E_p^2] + \ln \mathcal{N} \right\} \end{aligned}$$

- Matsubara-Summe ist divergent

- kann Summe über ω konvergent machen, indem man stattdessen

$$\partial_{m^2}\Omega' = - \sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{-(i\omega - \mu)^2 + E_p^2}$$

berechnet

- Matsubarasumme für obige Summe für $\partial_{m^2}\Omega$ (s. Abschnitt 7):

$$f(z) = \frac{1}{(z - \mu)^2 - E_p^2} = \frac{1}{[z - (\mu + E_p)][z - (\mu - E_p)]}$$

- die beiden rot-grünen Konturen umschließen jeweils die einfachen Pole bei $z = E_p + \mu$ und $z = -E_p + \mu$
- Konturen im Uhrzeigersinn: Faktor $-2\pi i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \partial_{m^2}\Omega' &= -V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} \{-f_B[-(E_p - \mu)] + f_B(E_p + \mu)\} \\ &= -V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} [1 + f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu)] \end{aligned}$$

- Summen über β mit Faktoren f_B konvergent

$$\partial_{m^2}\Omega' = -\beta \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}}_{\text{divergent!}} - V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} [f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu)],$$

- nun ist

$$\partial_{m^2}\Omega' = \frac{1}{2m} \partial_m \Omega' = \frac{1}{2E_p} \partial_{E_p} \Omega'.$$

- integriere bzgl. E_p :

$$\begin{aligned} \Omega' &= -\beta \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p}_{\text{divergent!}} \\ &\quad - V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{\ln[1 - \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 - \exp(-\beta(E_p + \mu))]\} \end{aligned}$$

- innere Energie

$$U = -(\partial_\beta \Omega')_{\alpha=-\beta\mu=\text{const}} = \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} E_p}_{\text{divergent!}} + V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} E_p [f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu)]$$

- $\Rightarrow$ divergentes Integral $\Rightarrow$ Nullpunktsenergien der $\vec{p}$ -Feldmoden $E_p/2$ für Teilchen und nochmal $E_p/2$ für die Antiteilchen
- taucht auf, weil wir Hamiltonian nicht wie im Operatorformalismus **normalgeordnet** sondern **Weyl-geordnet** haben!
- muss abgezogen werden $\Rightarrow$ „**Renormierung**“
- endliches großkanonisches Potential

$$\Phi(T, V, \mu, \xi, \xi^*) = -T\Omega_{\text{ren}} = V(m^2 - \mu^2)\xi^* \xi + TV \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \ln[1 - \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 - \exp(-\beta(E_p + \mu))] \}$$

- Bestimmung der Parameter ξ und ξ^* bzw. $\xi^* \xi$: Φ muss **minimiert werden** bzgl. solcher indeterminierter Parameter (Thermodynamik! s. [Cal85])
- für $|\mu| < m$: $|\xi|^2 = 0$
- für $\mu = m$: $|\xi|^2$ indeterminiert
- **Gesamtladung (Netzteilchenzahl):**

$$q = -\partial_\mu \Phi = \underbrace{2V\mu\xi^* \xi}_{q_{\text{kond}}} + \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} [f_B(E_p - \mu) - f_B(E_p + \mu)]}_{q_{\text{ang}}}$$

- für $\mu > 0$ ist $q > 0 \Rightarrow$ mehr Teilchen als Antiteilchen
- für $\mu < 0$ ist $q < 0 \Rightarrow$ mehr Antiteilchen als Antiteilchen
- für kleine $T < T_{\text{krit}}$ bzw. große β liefert maximalstmöglicher Wert $\mu = m$ nur $0 < q_{\text{ang}} < q \Rightarrow$ muss $|\xi|^2$ so wählen, dass q_{cond} fehlende Teilchenzahl ergibt
- T_{krit} wird bestimmt durch Bedingung $q_{\text{ang}} = q$

- entsprechend für Antiteilchenüberschuss: für $T < T_{\text{krit}}$ liefert $\mu = -m$ nur $0 > q_{\text{ang}} > q \Rightarrow |\xi|^2$ so wählen, dass $q_{\text{kond}} < 0$ fehlende Antiteilchenzahl liefert
- Term kommt von Nullmode (s.o.): für $T < T_{\text{krit}}$ ist **makroskopischer Anteil** der Gasteilchen (bzw. Gasantiteilchen) im **Einteilchengrundzustand** bei $\vec{p} = 0$
- **Bose-Einstein-Kondensat** [Ein24, Ein25]
- $|\xi|^2$ ist **Ordnungsparameter** für Phasenübergang zwischen Zuständen mit und ohne Bose-Einstein-Kondensat
- **Für endliches L** : komme mit $|\xi|^2 = 0$ aus, da Beitrag der Summe von $\vec{p} = 0$ beliebig mit $\mu \rightarrow \pm m$ betragsmäßig beliebig groß gemacht werden kann

Fermionen

- analog wie bei Bosonen aber mit **Grassmann-Zahlenwertigen Feldern**
- quasiperiodische Randbedingungen bei Bosonen $\rightarrow$ **antiquasiperiodische Randbedingungen bei Dirac-Fermionen**

$$\begin{aligned}\psi(\tau = \beta, \vec{x}) &= -\exp(-\beta\mu)\psi(\tau = 0, \vec{x}), \\ \bar{\psi}(\tau = \beta, \vec{x}) &= -\exp(+\beta\mu)\bar{\psi}(\tau = 0, \vec{x}),\end{aligned}$$

- **fermionische Matsubara-Frequenzen**

$$\omega \in \frac{(2\mathbb{Z} + 1)\pi}{\beta}$$

- Summen über fermionische Matsubarasummen: $-\beta f_{\text{F}}$ mit **Fermiverteilungsfunktion**

$$f_{\text{F}}(z) = \frac{1}{\exp(\beta z) + 1}$$

- keine Nullmoden $\Rightarrow$ Zustandssumme

$$\Omega = \ln Z = V g_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \ln[1 + \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 + \exp(-\beta(E_p + \mu))] \right\}.$$

- Spinentartungsfaktor: $g_s = 2s + 1 = 2$
- **Wechselwirkende Theorie**

- wieder einfachstes Beispiel: $\lambda \phi^4$ mit $\phi \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu = 0$ (keine erhaltene Ladungen)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

- für Zustandssumme, Ω , Φ : formal exakt gleiche **erzeugende Funktionale** wie im Vakuum
- aber: **Imaginärzeit** $t = -i\tau$, $\tau \in [0, \beta]$
- Vertex: $-\lambda/4!$
- Propagator

$$\Delta_M(p_E) = \frac{1}{-(i\omega)^2 + \vec{p}^2 + m^2}, \quad \omega \in (2\pi/\beta)\mathbb{Z}$$

- Korrekturen zu $\Omega = \ln Z$: alle geschlossenen zusammenhängenden Diagramme

- **Wiederherstellung der chiralen Theorie**

- betrachte einfachstes lineares σ -Modell (mit Pionen und σ -Mesonen)
- $\phi = (\sigma, \vec{\pi})^T \in \mathbb{R}^4$
- $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie realisiert durch $SO(4)$ (im **chiralen Limites**)

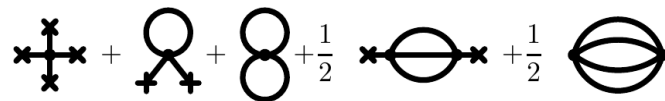
$$\mathcal{L}_{\chi \text{ limit}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - f_\pi^2)^2$$

- kann mit isospin-chemischem Potential gerechnet werden (hier zur Einfachheit $\mu_I = 0$)
- berechne **effektives Quantenpotential** als

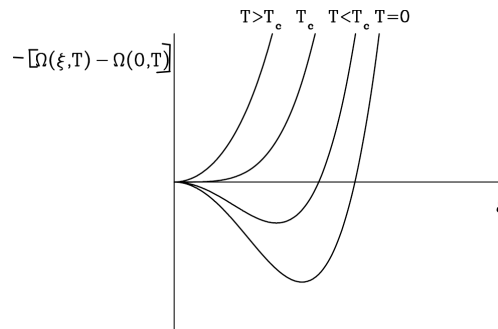
$$V(\xi, T) = -\Omega(\xi, T) = -\ln Z(\varphi, T)$$

$$Z(\xi, T) = \mathcal{N} \int_{\text{KMS}} D\phi \exp[-S_E(\xi + \varphi)]$$

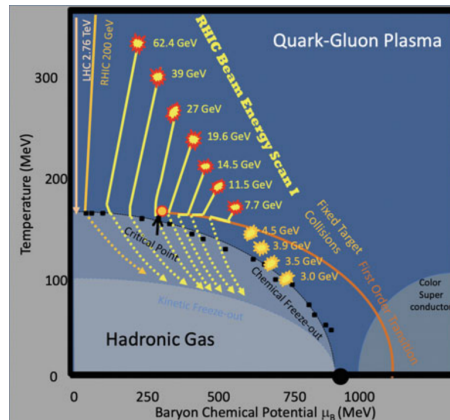
- einige Beispieldiagramme



- divergente Teile müssen renormiert werden: **geht mit reinen Vakuum-Gegentermen**
- T - (und μ -)abhängiges Potential



- **Grundzustand im Minimum des Potentials**
 - ξ : **Ordnungsparameter** $\Rightarrow \xi > 0$ **chiral gebrochene Phase**
 - **masselose Pionen**
 - Nambu-Goldstone-Bosonen der spontan gebrochenen Symmetrie: $SO(4) \rightarrow SO(3)$
 - σ -Meson massiv
 - für $T > T_c$: $\xi = 0 \Rightarrow$ spontane Symmetriebrechung aufgehoben
 - Pionen werden **massiv** und haben gleiche Masse wie σ
- **Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Materie**
 - aus QCD-Sicht interpretiert: **Schmelzen des Quark-Kondensats**
 - Gitter-QCD-Rechnung bei endlichen T ($\mu_B = 0$): Crossover-Übergang bei $T_{pc} \simeq 155$ MeV
 - auch (pseudo-)kritische Temperatur des **Confinement-Deconfinement-Übergangs**
 - Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Materie
 - bei endlichem baryochemischem Potential: $\mu_B \neq 0 \Rightarrow$ Gitter-QCD schwierig („sign problem“)
 - Phasendiagramm nicht exakt bekannt $\Rightarrow$ **ultrarelativistische Schwerionenkollisionen**
 - Phasenübergang in Natur: **$\simeq 10$ ms nach Urknall**



aus [BRST22]

2 Thermische Feldtheorie (Schwinger-Keldysh-Formalismus)

Thermische Feldtheorie (Schwinger-Keldysh- Formalismus)

Literatur: [LMB04, Dan84b, Dan84a, Lv87, CSHY85, Kam11, KB61]

Schwinger-Keldysh-Kontur

- zunächst beliebiger statistischer Operator
- **Wechselwirkungsbild**: Observablenoperatoren (einschließlich Feldoperatoren) mit $\mathbf{H}_I^{(0)}$

$$\phi_I(t, \vec{x}) = \mathbf{A}_I(t, t_i) \Phi_I(t_i, \vec{x}) \mathbf{A}_I^\dagger(t, t_i)$$

mit $\mathbf{A}_I(t, t_0) = \mathcal{T}_c \exp \left[+i \int_{t_i}^t dt' \mathbf{H}_I^{(0)}(t') \right] = \exp \left[i \mathbf{H}_I^{(0)}(t - t_0) \right]$

- Zeitentwicklung des Zustandes (statistischen Operators) mit $\mathbf{H}_I^{(i)}$

$$\mathbf{R}_I(t) = \mathbf{C}_I(t, t_i) \mathbf{R}_I(t_i) \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i)$$

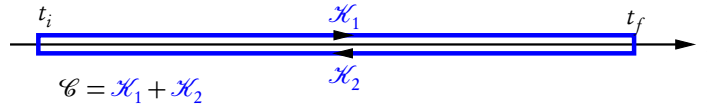
mit $\mathbf{C}_I(t, t_i) = \mathcal{T}_c \exp \left[-i \int_{t_i}^t dt' \mathbf{H}_I^{(i)}(t') \right]$

$$\Rightarrow \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i) = \mathcal{T}_a \exp \left[+i \int_{t_i}^t dt' \mathbf{H}_I^{(i)}(t') \right]$$

- Erwartungswert einer beliebigen zeitabhängigen Observablen $\mathbf{O}_I(t)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{O}(t) \rangle_{\mathbf{R}} &= \text{Tr}[\mathbf{R}_I(t) \mathbf{O}_I(t)] = \text{Tr}[\mathbf{R}_I(t_i) \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i) \mathbf{O}_I(t) \mathbf{C}_I(t, t_i)] \\ &= \text{Tr} \left[\mathbf{R}_I(t_i) \mathcal{T}_a \left\{ \exp \left[i \int_{t_i}^t dt' \mathbf{H}_I^{(i)}(t') \right] \right\} \mathbf{O}_I(t) \mathcal{T}_c \left\{ \exp \left[-i \int_{t_i}^t dt' \mathbf{H}_I^{(i)}(t') \right] \right\} \right]. \end{aligned}$$

- **Schwinger-Keldysh-Kontur**



- Erwartungswert als **konturzeitgeordnetes Produkt**

$$\langle \mathbf{O}(t) \rangle_{\mathbf{R}} = \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}_I(t_i) \mathcal{T}_C \left[\exp \left(-i \int_C dt' \mathbf{H}_I^{(i)}(t') \right) \mathbf{O}_I(t) \right] \right\}.$$

Erweiterte Schwinger-Keldysh-Kontur (Gleichgewicht)

- im thermodynamischen Gleichgewicht im **Heisenberg-Bild**

$$\mathbf{A}_H(t, t_i) = \exp[i\mathbf{H}_H(t - t_i)], \quad \mathbf{O}_H(t) = \mathbf{A}_H(t, t_i)\mathbf{O}_H(t_i)\mathbf{A}_H^\dagger(t, t_i), \quad \mathbf{C}_H(t, t_i) = \mathbb{1}$$

- statistischer Operator (betrachte Feldtheorie mit einem reellen Skalarfeld $\Rightarrow \mu = 0$)

$$\mathbf{R}_H(t) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathbf{H}_H) = \frac{1}{Z} \mathbf{A}_H^\dagger(t_i - i\beta, t_i), \quad Z = \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H}_H)$$

- Erwartungswert einer Observablen

$$\langle \mathbf{O}_H(t) \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}[\mathbf{A}_H^\dagger(t_i - i\beta, t_i) \mathbf{O}_H(t)]$$

- Transformation ins Wechselwirkungsbild

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_H &= \mathbf{R}_I(t_i) = \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i) \mathbf{R}_I(t) \mathbf{C}_I(t, t_i) \stackrel{!}{=} \mathbf{U}_{HI}(t, t_i) \mathbf{R}_I(t) \mathbf{U}_{HI}^\dagger(t, t_i) \\ \Rightarrow \mathbf{U}_{HI}(t, t_i) &= \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i) \end{aligned}$$

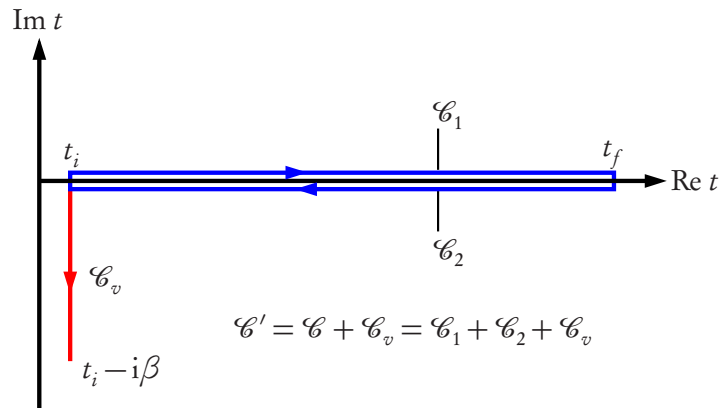
- andererseits mit Observablen

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_H(t) &= \mathbf{A}_H(t, t_i) \mathbf{O}_H(t_i) \mathbf{A}_H^\dagger(t, t_i) = \mathbf{A}_H(t, t_i) \mathbf{O}_I(t_i) \mathbf{A}_H^\dagger(t, t_i) \\ &= \mathbf{A}_H(t, t_i) \mathbf{A}_I^\dagger(t, t_i) \mathbf{O}_I(t) \mathbf{A}_I(t, t_i) \mathbf{A}_H^\dagger(t, t_i) \\ \Rightarrow \mathbf{U}_{HI} &= \mathbf{A}_H(t, t_i) \mathbf{A}_I^\dagger(t, t_i) = \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i) \Rightarrow \mathbf{A}_H(t, t_i) = \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i) \mathbf{A}_I(t, t_i) \\ \Rightarrow \mathbf{A}_H^\dagger(t, t_i) &= \mathbf{A}_I^\dagger(t, t_i) \mathbf{C}_I(t, t_i) = \exp[-i\mathbf{H}_I^{(0)}(t - t_i)] \mathbf{C}_I(t, t_i) \end{aligned}$$

- Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle O(t) \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[\mathbf{A}_H^\dagger(t_i - i\beta, t_i) \mathbf{O}_H(t)] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[\mathbf{A}_H^\dagger(t_i - i\beta, t_i) \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i) \mathbf{O}_I(t) \mathbf{C}_I(t, t_i)] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr}[\exp(-\beta \mathbf{H}_I^{(0)}) \mathbf{C}_I(t_i - i\beta, t_i) \mathbf{C}_I^\dagger(t, t_i) \mathbf{O}_I(t) \mathbf{C}_I(t, t_i)] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\exp(-\beta \mathbf{H}_I^{(0)}) \mathbf{C}_I(t_i - i\beta, t_i) \exp \left[-i \int_{\mathcal{C}} dt' \mathbf{H}_I^{(i)}(t') \right] \mathbf{O}_I(t) \right] \\ &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\exp(-\beta \mathbf{H}_I^{(0)}) \mathcal{T}_{\mathcal{C}'} \exp \left[-i \int_{\mathcal{C}'} dt' \mathbf{H}_I^{(i)}(t') \right] \mathbf{O}_I(t) \right] \end{aligned}$$

- mit **erweiterter Schwinger-Keldysh-Kontur**



3 Erzeugende Funktionale (Störungsrechnung)

Erzeugende Funktionale (Störungsrechnung)

Literatur: [KG06, LeB96, Hee17, Mab97, Gel96, Gel99]

Erzeugende Funktionale (Störungsrechnung)

- im Pfadintegralzugang formal **wie in Vakuum-QFT**
 - im Wirkungsfunktional statt Integration über $t \in \mathbb{R}$ **Integration über Kontur $\mathcal{C}'$**
 - statt homogener Randbedingungen für $t \rightarrow \pm\infty$ **quasi-(anti-)periodische KMS-Randbedingungen**
 - im Folgenden Abkürzung für Raumzeit-Integrale

$$\int_{\mathcal{C}} dt_1 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}_1 F(x_1) = \{F_1\}_1$$

- im Folgenden am Beispiel der einfachen ϕ^4 -Theorie
- Erweiterung zu Dirac-Fermionen, VektorFFeldern, ... wie in Vakuum-QFT
- Erzeugendes Funktional für N -Punkt-Funktionen

$$Z[J] = \int_{\text{KMS}} D\phi \exp[iS[\phi] + i\{J_1 \phi_1\}_1],$$

$$S[\phi] = \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) - \frac{m^2}{2}\phi_1^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi_1^4 \right\}_1.$$

- N -Punkt Green-Funktion

$$iG_{\mathcal{C}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \left[\frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta J(x_n)} Z[J] \right]_{J=0}$$

- $Z[0]$: Zustandssumme $\hat{=}$ geschlossenen Feynman-Diagrammen **ohne äußere Beinchen/Raumzeitpunkte**
- Realzeitkonturbeiträge canceln sich $\Rightarrow$ **reine Imaginärzeit-Größe**
 $\Rightarrow$ wird im **Matsubara-Formalismus** berechnet

- Störungsreihe mit **Funktional für freie Felder**

$$Z_0[J] = \int_{\text{KMS}} D\phi \exp[iS_0[\phi] + i\{J_1 \phi_1\}_1],$$

$$= \mathcal{N} \left\{ \frac{i}{2} \Delta_{\mathcal{C}', 12} J_1 J_2 \right\}_{12},$$

$$S_0[\phi] = \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) - \frac{m^2}{2}\phi_1^2 \right\}_1.$$

- Berechnung von freier Zweipunkt-Green-Funktion $\Delta_{\mathcal{C}'}$
 - für reine Realzeit-Green-Funktionen s. Übung 13
 - für reine Imaginärzeit-Matzubare-Green-Funktionen s. oben
 - gemischte Funktionen $\Delta^{\nu j}$ oder $\Delta^{j\nu}$ mit $(j \in \{1,2\})$:
Beiträge zu $Z_0[J]$ canceln für $t_i \rightarrow -\infty$

- Faktorisierung [LM96, Mab97, Gel96, Gel99, Hee17]

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \exp\left(\frac{i}{2} \int_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}} d^4x \Delta_{\mathcal{C}}(x_1, x_2) J(x_1) J(x_2)\right) \exp\left(\frac{i}{2} \int_{\mathcal{C}_\nu} d^4x \Delta_{\mathcal{C}}(x_1, x_2) J(x_1) J(x_2)\right) \\ &= Z_0^{(\mathbb{R})}[J] Z_0^{(\nu)}[J]. \end{aligned}$$

- Dyson-Reihe für das Funktional

$$Z[J] = \left\{ \exp\left[i \mathcal{S}_1\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right) \right] Z_0[J] \right\}_x$$

- da $\ln Z_0$ quadratisches Funktional in $J \Rightarrow$ Wick-Theorem
- Diagramme für Realzeit-Greenfunktionen mit mindestens einem äußeren Raumzeit-Punkt können allein im Keldysh-Realzeitformalismus ausgeführt werden
- Zustandssummen („Bubble-Diagramme“) ohne äußere Raumzeit-Punkte $\Rightarrow$ im Matsubara-Imaginärzeit-Formalismus oder via analytische Fortsetzung aus Realzeitformalismus
- Erzeugendes Funktional für zusammenhängende Green-Funktionen

$$Z[J] = \exp(iW[J]) \Leftrightarrow W[J] = -i \ln Z[J] \Rightarrow \langle \phi(x) \rangle = \frac{\delta W}{\delta J(x)}$$

- Erzeugendes Funktional für einteilchenirreduzible (1PI) amputierte Diagramme $\hat{=}$ eigentliche Vertex-Funktionen

$$\Gamma[\Phi] = W[J] - \langle \phi_1 J_1 \rangle_1$$

- Feynman-Regeln für Keldysh-Realzeit-Green-Funktionen

- jeder Vertex trägt Index $i \in \{1,2\}$ entsprechend der Lage des entsprechenden Raumzeitpunkts auf $\mathcal{K}_1$ oder $\mathcal{K}_2$

The image shows two Feynman diagrams. The first is a four-point vertex represented by a cross, with an external index i and the value $i = (-1)^i \frac{i\lambda}{4!}$. The second is a tadpole diagram with two external indices i and j , and a value $k = i\Delta^{ij}(k)$.

- Regularisierung von **on-shell δ -Distributionen**, so dass KMS-Bedingungen für Zweiteilchen Green-Funktionen erhalten bleiben [Gel96, Gel99, LM96, Mab97, Hee17]

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon(p_0 - E_p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dt \exp[i(p_0 - E_p)t - \epsilon|t|] \\ &= \frac{i}{2\pi} \left[\frac{1}{p_0 - E_p + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 - E_p - i\epsilon} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{(p_0 - E_p)^2 + \epsilon^2}, \\ \delta_\epsilon(p^2 - m^2) &= \frac{1}{2E_p} [\delta_\epsilon(p^0 - E_p) + \delta_\epsilon(p^0 + E_p)], \\ \delta_\epsilon^{(\sigma)}(p^2 - m^2) &= \frac{1}{2E_p} [\delta_\epsilon(p^0 - E_p) - \delta_\epsilon(p^0 + E_p)].\end{aligned}$$

- freie Propagatoren (regularisiert mit endlichen $\epsilon > 0$)

$$\begin{aligned}i\Delta^{11}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + n_B(p_0)2\pi\delta_\epsilon(p^2 - m^2) \\ i\Delta^{22}(p) &= -\frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} + n_B(p_0)2\pi\delta_\epsilon(p^2 - m^2) \\ i\Delta^{21}(p) &= 2\pi\delta_\epsilon^{(\sigma)}(p^2 - m^2)[f_B(p_0) + 1] = 2\pi[n_B(p_0) + \Theta(p_0)]\delta_\epsilon(p^2 - m^2), \\ i\Delta^{12}(p) &= 2\pi\delta_\epsilon^{(\sigma)}(p^2 - m^2)f_B(p_0) = 2\pi[n_B(p_0) + \Theta(-p_0)]\delta_\epsilon(p^2 - m^2) \\ \text{mit } 2\pi\delta_\epsilon(x) &= \frac{i}{x + i\epsilon} - \frac{i}{x - i\epsilon} = \frac{2\epsilon}{(x^2 + \epsilon^2)}, \quad n_B(p_0) = f_B(|p_0|).\end{aligned}$$

- Regularisierung: saubere Definition von Produkten von δ distributionen $\Rightarrow$ **keine „Pinch-Singularitäten“**
- Formulierungen mit $n_B(p_0)$: im Limes $\beta \rightarrow \infty \Rightarrow$ **Vakuum-QFT**
- bei endlichem $\beta = 1/T$: Zerlegung in **Vakuum- und Mediumanteile** $\Rightarrow$ brauche **nur Vakuum-Gegenterme** in divergenten 1PI-Vertex(sub)diagrammen zur **Renormierung**

- **Diagonalisierung**

$$\hat{\Delta}_\epsilon(k) = \hat{U}(k^0) \hat{\Delta}_{D,\epsilon}(k) \hat{U}(k^0)$$

$$\text{mit } \hat{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+n(k^0)} & \frac{\Theta(-k^0)+n(k^0)}{\sqrt{1+n(k^0)}} \\ \frac{\Theta(k^0)+n(k^0)}{\sqrt{1+n(k^0)}} & \sqrt{1+n(k^0)} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{D,\epsilon}(k) = \text{diag}[\tilde{\Delta}_{F,\epsilon}(k), -\tilde{\Delta}_{F,\epsilon}^*(k)]$$

$$\text{und } \Delta_{F,\epsilon}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- mit $\hat{\eta} = \text{diag}(1, -1)$

$$\hat{U}^{-1} = \hat{\eta} \hat{U} \hat{\eta}$$

- **Dyson-Reihe für Selbstenergieeinschübe**

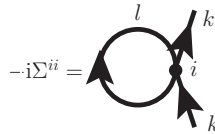
- $\Sigma^{jk}(p)$: 1PI amputierte Zweipunktdiagramme
- $\hat{\Sigma}$ enthält keine δ -Distributionen
- Dyson-Gleichung

$$\hat{G}(k) = \hat{\Delta}(k) + \hat{\Delta}(k) \hat{\eta} \hat{\Sigma}(k) \hat{\eta} \hat{G}(k)$$

$$\Leftrightarrow \hat{G}_D(k) = \hat{\Delta}_D(k) + \hat{\Delta}_D(k) \hat{\eta} \hat{\Sigma}_D(k) \hat{\eta} \hat{G}_D(k)$$

$$\Leftrightarrow \hat{G}_D^{-1}(k) = \hat{\Delta}_D^{-1}(k) - \hat{\eta} \hat{\Sigma}_D(k) \hat{\eta}$$

- Beispiel: **Tadpole-Selbstenergie**



$$\text{Feynman-Regeln } \Sigma^{12} = \sigma^{21} = 0$$

$$-i\Sigma^{ii} = (-1)^i \frac{i\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[\frac{i}{l^2 - m^2 + i0^+} + 2\pi n_B(p_0) \delta(l^2 - m^2) \right].$$

- 1. Term: **quadratisch divergenter Vakuum-Teil** $\Rightarrow$ Gegenterm δm^2 (**Massenrenormierung**)
- Thermischer Beitrag zur Masse (endlich)

$$\Sigma^{11} = -\Sigma^{22} = \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 E_l} n(l^0)$$

$$\Rightarrow \hat{\Sigma} = \Sigma^{11} \hat{\eta}$$

$$\Rightarrow \hat{\Sigma}_D = \hat{\eta} \hat{U} \hat{\eta} \hat{\Sigma} \hat{\eta} \hat{U} \hat{\eta} = \Sigma^{11} \hat{\eta} \hat{U} \hat{\eta} \hat{U} \hat{\eta} = \Sigma^{11} \hat{\eta}$$

- Dyson-Gleichung (mit regularisierten Green-Funktionen)

$$\begin{aligned}\hat{G}_D^{-1}(p) &= \begin{pmatrix} p^2 - m^2 + i\epsilon & 0 \\ 0 & -(p^2 - m^2 - i\epsilon) \end{pmatrix} - \hat{\eta} \hat{\Sigma}_D \hat{\eta} \\ &= \begin{pmatrix} p^2 - m^2 - \Sigma^{11} + i\epsilon & 0 \\ 0 & -(p^2 - m^2 - \Sigma^{11} - i\epsilon) \end{pmatrix} = (\hat{\Delta}_D^{-1})_{m^2 \rightarrow m^2 + \Sigma^{11}}\end{aligned}$$

- Pinch-Singularitäten kein Problem dank KMS-kompatibler Regularisierung!

4 Φ -Funktionaltheorie

Φ -Funktionaltheorie

Literatur: [\[LW60, BK61, Bay62, Jac74, CJT74, Hee17\]](#)

Φ-Funktionalformalismus

- formale Störungsrechnung bricht zusammen für Theorien mit masselosen Teilchen (Goldstone-Bosonen/Phasenübergänge, „ungehigste“ Eichtheorien)
- Grund: IR- und/oder kollineare Divergenzen
- Lösung: Propagatoren in Feynman-Diagrammen müssen resummiert werden
 - für Eichtheorien $\Rightarrow$ Hard-Thermal-Loop Resummation [LeB96, HM25]
- Ziel: selbstkonsistente Näherungen für Zweipunktfunktionen $\Leftrightarrow$ Einteilchengrößen
 - erfüllen Erhaltungssätze für entsprechende Erwartungswerte (Energie, Impuls, Drehimpuls, evtl. erhaltene Ladungen)
 - sind thermodynamisch konsistent $\Leftrightarrow$ thermodynamische Größen aus thermodynamischen Potentialen = denen aus Zweipunktfunktionen
- Luttinger, Ward, Kadanoff, Baym,... Bewegungsgleichungen für mittleres Feld und Zweipunktfunktion $\Leftrightarrow$ herleitbar aus Φ-Funktional
- für relativistische QFTn: Cornwall, Jackiw, Tomboulis
- Erzeugendes Funktional für mittleres Feld und Zweipunktkorrelationsfunktionen (ausführliche Herleitungen s. [Jac74, CJT74, Hee17])
 - externe lokale und bilokale Quellen

$$Z[J, K] = \exp(iW[J, K]) = \mathcal{N} \int_{\text{KMS}} D\phi \exp\left(iS[\phi] + i\{J_1\phi_1\}_1 + \frac{i}{2}\{K_{12}\phi_1\phi_2\}\right)$$

- mittleres Feld und zusammenhängende Zweipunktfunktion

$$\varphi_1 = \frac{\delta W[J, K]}{\delta J_1}, \quad G_{12} = -\frac{\delta^2 W}{\delta J_1 \delta J_2} \Rightarrow \frac{\delta W[J, K]}{\delta K_{12}} = \frac{1}{2}(\varphi_1 \varphi_2 + iG_{12}).$$

- Funktionale Legendre-Transformation bzgl. J und K

$$\mathbb{I}[\varphi, G] = W[J, K] - \{J_1\varphi_1\} - \frac{1}{2}\{(\varphi_1\varphi_2 + iG_{12})K_{12}\}_{12}$$

- Sattelpunktentwicklung des Pfadintegrals

$$\mathbb{I}[\varphi, G] = S[\varphi] - \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(iG M^2) + \frac{i}{2} \{ \mathcal{D}_{12}^{-1}(G_{12} - \mathcal{D}_{12}) \}_{12} + \Gamma_2(\varphi, G)$$

with $\mathcal{D}_{12}^{-1} = \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} = \left(-\square_1 - m^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi_1^2 \right) \delta^{(4)}(x_1 - x_2)$

- Feldgleichungen

$$\frac{\delta \mathbb{I}[\varphi, G]}{\delta \varphi_1} = J_1 \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\frac{\delta \mathbb{I}[\varphi, G]}{\delta G_{12}} = -\frac{i}{2} K_{12} \stackrel{!}{=} 0$$

- using above decomposition of $\mathbb{I}$

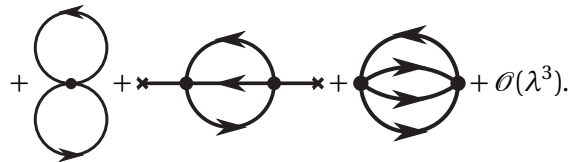
$$\frac{\delta \mathbb{I}}{\delta \varphi_1} = \left(-\square_1 - m^2 + \frac{i\lambda}{2} \varphi_1^2 G_{11} \right) \varphi_1 - \frac{\lambda}{3!} \varphi_1^3 + \frac{\delta \Gamma_2}{\delta \varphi_1} = 0,$$

$$\mathcal{D}_{12}^{-1} - G_{12}^{-1} := \Sigma_{12} = 2i \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G_{12}}$$

- Diagrammatik:

- Propagatorlinien $\hat{=}$ **volle Green-Funktion**
- „Nadeln“ mit Spitze an Raumzeitpunkt x : $\varphi(x)$

$$i\mathbb{I}[\varphi, G] = iS[\varphi] - \frac{1}{2} \{ \mathcal{D}_{12}^{-1}(G_{12} - \mathcal{D}_{12}) \}_{12} + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(M^2 iG)$$



- **Selbstenergie** (relativ zu $\mathcal{D}_{12}^{-1}$): amputierte 1PI Zweipunktfunktionen mit exakten Propagatorlinien, die **keine Selbstenergieeinschübe** enthalten („**Skelettdiagramme**“)
 $\Rightarrow \Gamma_2$: **geschlossene zweiteilchenirreduzible (2PI) Diagramme**
- Selbstkonsistentes System von Gleichungen für mittleres Feld φ und exakte Zweipunkt-Green-Funktion:
Kadanoff-Baym-Gleichungen

- $\mathbb{I}[\varphi, G]$ (mit φ und G Lösungen der KB-Gleichungen) $\Rightarrow$ thermodynamisches Potential
- thermodynamische Größen, berechnet aus diesem Potential $\hat{=}$ Größen berechnet aus G_{12}
thermodynamische Konsistenz
- **Erhaltungssätze** gelten für **Mittelwerte**
- kann mit **Vakuum-Gegentermen** renormiert werden [HK02a, HK02b, HK02c]
- Offenes **Problem**: i.a. werden Ward-Takashi-Identitäten von (globalen und lokalen) Symmetrien verletzt
Grund: es werden unendlich viele störungstheoretische Diagramme resummiert aber nie vollständig

Φ -derivable approximations: Diagrams

- Feynman diagrams applicable to vacuum, equilibrium, non-equilibrium situations
- generating functional for mean fields and self-energies (lines = full propagators!)

$$i\Gamma[\varphi, G] = iS[\varphi] + \text{diagram 1} + \underbrace{\text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots}_{i\Phi}$$

- mean-field equation of motion $\delta\Gamma/\delta\phi(x) = 0$ (take off 1 “sticker”)

$$i(\square + m^2)\varphi = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots$$

- self-energy: $\Sigma_{12} \propto \delta\Gamma/\delta G_{21}$ (open one propagator line)

$$-i\Sigma_{12} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots$$

$$\text{green line} = \text{blue line} + \text{blue line} \text{ with } -i\Sigma \text{ box} + \dots$$

$$\text{green line} = \text{blue line with } -i\Sigma \text{ box} + \text{blue line with } -i\Sigma \text{ box} \text{ and } -i\Sigma \text{ box} + \dots$$

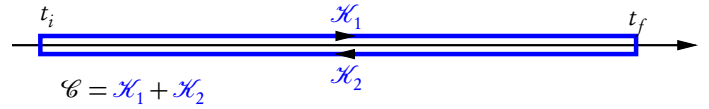
5 Transportgleichungen

Transportgleichungen

Literatur: [\[IKV03, KIV01, IKV00, IKV99, Cas21, Cas09, JCG04, Dan84a, Dan84b\]](#)

Herleitung von Quantentransportgleichungen

- basiert auf [\[KIV01\]](#)
- jetzt allgemeiner **Nichtgleichgewichtsanfangszustand** $\mathbf{R}(t_i)$
- reine Realzeit-Schwinger-Keldysh-Kontur $\Rightarrow$ keine KMS-Bedingung mehr!



- Kadanoff-Baym-Gleichungen von Φ -Funktional

$$(D_1^{-1} - D_2^{-1})G^{12}(1, 2) = \int_{\mathcal{C}} d3 [\Sigma(1^1, 3)G(3, 2^2) - G(1^-, 3)\Sigma(3, 2^+)] \equiv \text{Coll.}$$

mit $D_1^{-1} = -\square_1 - m^2$

- **Wigner-Transformierte** von Zweipunktfunktionen mit $X = (x_1 + x_2)/2$ und $r = x_1 - x_2$

$$\tilde{F}(X, p) = \int_{R^4} d^4 r F(X + r/2, X - r/2) \exp(ip \cdot x)$$

- Faltungsintegrale

$$C(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 z A(x_1, z) B(z, x_2)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{C}(X, p) = \widetilde{A * B}(X, p) = \exp \left[\frac{i}{2} \underbrace{\partial_X^A \partial_p^B - \partial_p^A \cdot \partial_X^B}_{\diamond} \right] \tilde{A}(X, p) \tilde{B}(X, p)$$

- mit retardierten/avancierten Green-Funktionen und Selbstenergien

$$G^{(\text{ret/adv})} = \pm \Theta[\pm(t_1 - t_2)] [G^{21}(x_1, x_2) - G^{12}(x_1, x_2)],$$

$$\Sigma^{(\text{ret/adv})} = \pm \Theta[\pm(t_1 - t_2)] [\Sigma^{21}(x_1, x_2) - \Sigma^{12}(x_1, x_2)],$$

$$G^{(\text{ret})-1}(X, p) = D^{(\text{ret})-1}(p) - \Sigma^{(\text{ret})-1}(X, p)$$

- KB-Gleichungen im Wigner-Bild und **Gradientenentwicklung**

$$2ip \cdot \partial_X G^{21} = (\Sigma^{(\text{ret})} G^{21} - G^{21} \Sigma^{(\text{adv})} + \Sigma^{21} G^{(\text{adv})} - G^{(\text{ret})} \Sigma^{21}) \\ + \frac{i}{2} \left(\{ \Sigma^{(\text{ret})}, G^{21} \}_{\text{pb}} - \{ G^{21}, \Sigma^{(\text{adv})} \}_{\text{pb}} + \{ \Sigma^{21}, G^{(\text{adv})} \}_{\text{pb}} - \{ G^{(\text{ret})}, \Sigma^{21} \}_{\text{pb}} \right)$$

alle Σ und G mit Argumenten (X, p)

- Spektralfunktion A :

$$G^{(\text{ret})} - G^{(\text{adv})} = -2iA(X, p)$$

- Kadanoff-Baym-Ansatz mit Phasenraumverteilung $f(X, p)$

$$F(X, p) = A(X, p)f(X, p) = iG^{12}(X, p), \quad \tilde{F}(X, p) = A(X, p)[1 + f(X, p)] = iG^{21}(X, p)$$

- Beispiel in ϕ^4 -Theorie

$$i\Phi = \frac{1}{2} \text{ (self-energy loop)} + \frac{1}{4} \text{ (tadpole diagram)}$$

- nur (maximal) zwei Raumzeit-Punkte in Φ -Funktional
- $\Rightarrow$ keine inneren Raumzeitpunkte in Selbstenergie $\Rightarrow$ **lokale Selbstenergie** exakt, d.h. alle Propagatoren G^{12} und G^{21} am gleichen Raumzeitpunkt $X = (x_1 + x_2)/2$

- üblicher Stoßterm “**Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck type**”

$$C^{(2)} = d^2 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \left| \overline{\mathbf{X}} \right|^2 \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p + p_1 - p_2 - p_3) (F_2 F_3 \tilde{F} \tilde{F}_1 - \tilde{F}_2 \tilde{F}_3 F F_1)$$

Stoßterme (Gedächtniseffekt)

$$i\Phi = i(\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)})$$

$$= \frac{1}{2} \text{ (self-energy loop)} + \frac{1}{4} \text{ (tadpole diagram)} + \frac{1}{6} \text{ (triangle diagram)}$$

- lokaler Teil (alle Green-Funktionen bei $X = (x_1 + x_2)/2$)

$$C^{(2)} + C_{\text{loc}}^{(3)} = d^2 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \left(\left| \overline{\mathbf{X}} \right|^2 + \left| \overline{\mathbf{Y}} \right|^2 - \left| \overline{\mathbf{Z}} \right|^2 \right) \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p + p_1 - p_2 - p_3) (F_2 F_3 \tilde{F} \tilde{F}_1 - \tilde{F}_2 \tilde{F}_3 F F_1),$$

- zusätzliche **nichtlokale/Gedächtnis**- Korrekturen von Diagramme mit inneren Raumzeitpunkten in Selbstenergie

$$-i\Sigma_{jk}^{(3)}(x, y) = \text{Diagram with vertices } y_k, x_j, \text{ and } z^l \text{ connected by three lines.}$$

Diagrammregeln für Gedächtniseffekte

- **lokale Diagramme**: übliche Impuls-Raum-Feynmanregeln mit allen G 's beim Raumzeitpunkt $X = (x_1 + x_2)/2$
- **1. Ordnung der Gradientenentwicklung** für $G(X', p)$ with $X' \neq X$

$$\begin{aligned} \overline{i} \text{---} j &= \frac{1}{2}(\partial_i + \partial_j)G(i, j) \rightarrow \partial_X G(X, p), \\ i \text{---} j &= -i(x_i - x_j) \rightarrow -(2\pi)^4 \frac{\partial}{\partial p} \delta(p) \end{aligned}$$

- **Beiträge von Gedächtniseffekten zu Zweipunktfunktionen**

$$\diamond(M(1, 2)) = \diamond \begin{array}{c} \boxed{M} \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \end{array} \equiv \begin{array}{c} \diamond \boxed{M} \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \end{array} = \begin{array}{c} \overset{3}{\curvearrowright} \boxed{M'} \overset{4}{\curvearrowright} \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} \overset{3}{\curvearrowleft} \boxed{M'} \overset{4}{\curvearrowleft} \\ \bullet \quad \bullet \\ 1 \quad 2 \end{array}$$

- $M'(12, 34) = \frac{\delta M(12)}{i\delta G(3,4)}$
- wende das auf alle Propagatoren an, die Raumzeitpunkte $\neq x_1, x_2$ enthalten

Diagramme für Einpunktfunktionen

- für **Energie-Impuls-Tensor**, Ströme von **Erhaltungsgrößen**

$$\begin{aligned} i\Phi_{\text{loc}}^D(X; r^-) &= \text{Diagram with vertices } 1, 2, \text{ and } r^- \text{ connected by three lines.} \\ &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 \bar{p}_1}{(2\pi)^4} \cdots G_{k_1 \dots \bar{k}_1 \dots}^{Dr}(X; p_1, \dots, \bar{p}_1, \dots) \\ &\quad \times (\mp i)G_1^{-k_1}(X, p_1) \cdots iG_1^{\bar{k}_1}(X, \bar{p}_1) \cdots \end{aligned}$$

- **Energie-Impuls-Tensor exakt erhalten**:

$$\Theta_{\text{loc}}^{\mu\nu}(X) = \sum_a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} v^\mu p^\nu (\mp i)G_a^{-+}(X, p) + g^{\mu\nu}(\mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{int}}(X) - \mathcal{E}_{\text{loc}}^{\text{pot}}(X))$$

- **exakt erhaltener Ladungsstrom**

$$J^\mu(X) = \sum_a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e_a v^\mu (\mp i)G_a^{-+}(X, p)$$

Off-Shell-Transport aus Φ -Funktional

- mit Φ -Funktional-Formalismus
- $\Rightarrow$ Kadanoff-Baym-Gleichungen für exakte Green-Funktionen (und ggf. mittlere Felder)
- Teilchen $\Rightarrow$ broad spectral functions (“off-shell”)
- über systematische Gradientenentwicklung für Wigner-Funktionen $\Rightarrow$ kinetische Gleichungen für „off-shell-Teilchen“
 - Erhaltungssätze für erhaltene Noether-Ladungen aus Symmetrien erfüllt (Energie, Impuls, Ladungen)
 - Definition von Entropie, die H-Theorem zumindest für Zustände nahe des thermischen Gleichgewichts erfüllt
 - Thermodynamische Konsistenz: Φ -Funktional definiert thermodynamisches Potential im Gleichgewicht $\Rightarrow$ thermodynamische Relationen erfüllt
 - Nichtgleichgewichtsentropie $\Rightarrow$ äquivalent zu thermodynamischer Entropie im Gleichgewicht

6 Anhang: Gauß-Integration

Gauß-Integration

- 1D Gaußintegral

$$I = \int_{\mathbb{R}} dx \exp(-Ax^2).$$

- Trick: berechne I^2

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \exp[-A(x^2 + y^2)], \quad \text{Re } A > 0$$

- integriere in Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $d^2 y = dr d\varphi r$:

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi r \exp(-Ar^2) = \frac{\pi}{A} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

- Gauß-Integral über komplexes Argument $z = x + iy$

$$dz dz^* := dx dy \det \frac{\partial(z, z^*)}{\partial(x, y)} = dx dy 2i$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{C}} dz dz^* \exp(-A z^* z) = 2i \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \int [-A(x^2 + y^2)] = 2i I^2 = \frac{2\pi i}{A}.$$

- Sei $\hat{A} \in \mathbb{C}^n$ selbstadjungiert mit **nur positiven Eigenwerten**
- dann existiert $\hat{U} \in \text{SU}(N)$ mit $\hat{A} = \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U}$, $\hat{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\mathbb{C}^n} dz_1 \cdots dz_n dz_1^* \cdots dz_n^* \exp(-z^\dagger \hat{A} z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} dz_1 \cdots dz_n dz_1^* \cdots dz_n^* \exp(-z^\dagger \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U} z) \end{aligned}$$

- substituiere $z' = \hat{U} z$ wegen $\det \hat{U} = 1$

$$I_n = \int_{\mathbb{C}^n} dz'_1 \cdots dz'_n dz'^*_1 \cdots dz'^*_n \exp(-z'^\dagger \hat{D} z') = \frac{(2\pi i)^n}{\prod_{j=1}^n \lambda_j} = \frac{(2\pi i)^n}{\det \hat{A}}$$

- nützliche Formel

$$\ln \det \hat{A} = \ln \prod_{j=1}^n \lambda_j = \text{tr} \ln \hat{A}$$

- Gauß-Integrale über **Grassmann-Zahlen** η_a and $\bar{\eta}_a$ ($a \in \{1, \dots, n\}$):

$$\int \prod_a d\bar{\eta}_a d\eta_a \exp(\bar{\eta}^T \hat{A} \eta) = \int \prod_a d\bar{\eta}_a d\eta_a (\cdots + \lambda_1 \cdots \lambda_n \bar{\eta}_1 \eta_1 \cdots \bar{\eta}_n \eta_n) = \prod_{a=1}^n \lambda_a = \det \hat{A}$$

7 Anhang: Berechnung von Matsubara-Summen

Berechnung von Matsubara-Summen

- bei Berechnung von Feynman-Diagrammen im **Matsubara-Imaginärzeit-formalismus**: Summen über Matsubara-Frequenzen statt Integrale über p^0 in Vakuum-Theorie

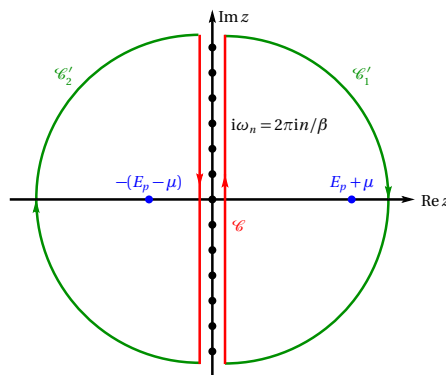
$$S = \sum_{\omega} f(i\omega) \quad \text{mit} \quad \omega = \begin{cases} (2n)\pi/\beta & \text{für Bosonen,} \\ (2n+1)\pi/\beta & \text{für Fermionen} \end{cases} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Idee: Nutze Residuensatz der Funktionentheorie

- **Bose-Einstein-Verteilungsfunktion**

$$f_B(z) = \frac{1}{\exp(\beta z) - 1}$$

$\beta f_B(z)$ hat einfache Pole bei **bosonischen Matsubarafrequenzen** $z = i\omega_n = (2n)\pi i/\beta$, $n \in \mathbb{Z}$ mit Residuum 1



- **Bose-Einstein-Verteilungsfunktion**

$$f_F(z) = \frac{1}{\exp(\beta z) + 1}$$

$\beta f_F(z)$ hat einfache Pole bei **fermionischen Matsubarafrequenzen** $z = i\omega_n = (2n+1)\pi i/\beta$, $n \in \mathbb{Z}$ mit Residuum -1

- **Residuensatz** für rote Kontur $\mathcal{C}$

$$\sum_{\omega} f(i\omega) = \pm \frac{\beta}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} dz f(z) f_{B/F}(z).$$

- Reihe konvergent, wenn $f(z)$ im Unendlichen schneller als $1/z$ abfällt
 $\Rightarrow$: kann grüne Halbkreise hinzufügen $\Rightarrow$ tragen im Limes Radius $\rightarrow \infty$ nichts bei!

- substituiere im Integral über $\mathcal{C}_2'$: $z \rightarrow -z$. Dann ergibt sich ein Integral über $\mathcal{C}_1'$:

$$\int_{\mathcal{C}_2} dz f(z) f_{B/F}(z) = - \int_{\mathcal{C}_1} dz f(-z) f_{B/F}(-z).$$

- Formeln für $f_{\text{B/F}}(-z)$

$$f_{\text{B/F}}(-z) = \mp 1 - f_{\text{B/F}}(z).$$

- Summenformeln über $\mathcal{C}_1$ allein:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega} f(i\omega) = \int_{\mathcal{C}_1} dz f(-z) \pm \int_{\mathcal{C}_1} dz [f(z) + f(-z)] f_{\text{B/F}}(z).$$

- Vorteil: im 2. Integral positive Realteile für $z \Rightarrow$ fällt für $T \rightarrow 0^+$ (also $\beta \rightarrow \infty$) weg.
- Limes $T \rightarrow 0^+$:
 - für $\mu = 0$: Diagramm der **euklidischen/Wick-rotierten Vakuum-QFT**
 - für $\mu \neq 0$: Diagramm für $T = 0$ (BEC für Bosonen bzw. bis zu $\mu = E_{\text{F}}$ gefüllter „Fermi-See“ für Bosonen)

8 Literatur

Literatur

Literatur

- [Bay62] G. Baym, Self-Consistent Approximations in Many-Body Systems, Phys. Rev. **127**, 1391 (1962), <https://link.aps.org/abstract/PR/v127/i4/p1391>.
- [BGG⁺12] O. Buss, T. Gaitanos, K. Gallmeister et al., Transport-theoretical Description of Nuclear Reactions, Phys. Rept. **512**, 1 (2012), <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.12.001>.
- [BK61] G. Baym and L. Kadanoff, Conservation Laws and Correlation Functions, Phys. Rev. **124**, 287 (1961), <https://link.aps.org/abstract/PR/v124/i2/p287>.
- [BRST22] D. Blaschke, K. Redlich, C. Sasaki and L. Turko (eds.), *Understanding the Origin of Matter: Perspectives in Quantum Chromodynamics*, vol. 999, Springer Nature Switzerland, Cham (2022), <https://doi.org/10.1007/978-3-030-95491-8>.

- [Cal85] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, John Wiley&Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 2 edn. (1985).
- [Cas09] W. Cassing, From Kadanoff-Baym dynamics to off-shell parton transport, *Eur. Phys. J. ST* **168**, 3 (2009),
<https://doi.org/10.1140/epjst/e2009-00959-x>.
- [Cas21] W. Cassing, *Transport Theories for Strongly-Interacting Systems: Applications to Heavy-Ion Collisions*, Springer, Cham (2021),
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-80295-0>.
- [CJT74] M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, Effective Action for Composite Operators, *Phys. Rev. D* **10**, 2428 (1974),
<https://link.aps.org/abstract/PRD/v10/i8/p2428>.
- [CSHY85] K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, Equilibrium and Nonequilibrium Formalisms made unified, *Phys. Rept.* **118**, 1 (1985),
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(85\)90136-X](https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90136-X).
- [Dan84a] P. Danielewicz, Quantum Theory of Nonequilibrium Processes I, *Ann. Phys.* **152**, 239 (1984),
[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(84\)90092-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90092-7).
- [Dan84b] P. Danielewicz, Quantum Theory of Nonequilibrium Processes II. Application to Nuclear Collisions, *Ann. Phys.* **152**, 305 (1984),
[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(84\)90093-9](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90093-9).
- [Ein24] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, Königliche Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte **1924**, 261 (1924),
https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf.
- [Ein25] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases – Zweite Abhandlung, Königliche Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte **1925**, 3 (1925),
https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf.

- [Gel96] F. Gelis, The Effect of the vertical part of the path on the real time Feynman rules in finite temperature field theory, *Z. Phys. C* **70**, 321 (1996), <https://doi.org/10.1007/s002880050109>.
- [Gel99] F. Gelis, A new approach for the vertical part of the contour in thermal field theories, *Phys. Lett. B* **455**, 205 (1999), [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)00460-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00460-8).
- [Hee17] H. van Hees, Nonequilibrium relativistic many-body theory (2017), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/off-eq-qft.pdf>.
- [HK02a] H. v. Hees and J. Knoll, Renormalization of self-consistent approximations I: theoretical concepts, *Phys. Rev. D* **65**, 025010 (2002), <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.105005>.
- [HK02b] H. v. Hees and J. Knoll, Renormalization of self-consistent approximations II: applications to the sunset diagram, *Phys. Rev. D* **65**, 105005 (2002), <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.105005>.
- [HK02c] H. v. Hees and J. Knoll, Renormalization of Self-consistent Approximations III: Symmetries, *Phys. Rev. D* **66**, 025028 (2002), <https://link.aps.org/abstract/PRD/v66/e025028>.
- [HM25] N. Haque and M. G. Mustafa, Hard Thermal Loop—Theory and applications, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **140**, 104136 (2025), <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2024.104136>.
- [IKV99] Y. B. Ivanov, J. Knoll and D. N. Voskresensky, Self-consistent approximations to non-equilibrium many-body theory, *Nucl. Phys. A* **657**, 413 (1999), <https://arxiv.org/abs/hep-ph/9807351>.
- [IKV00] Y. B. Ivanov, J. Knoll and D. Voskresensky, Resonance transport and kinetic entropy, *Nucl. Phys. A* **672**, 313 (2000), [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(99\)00559-X](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(99)00559-X).
- [IKV03] Y. Ivanov, J. Knoll and D. Voskresensky, Selfconsistent approach to off-shell transport, *Phys. Atom. Nucl.* **66**, 1902 (2003), <https://doi.org/10.1134/1.1619502>.
- [Jac74] R. Jackiw, Functional Evaluation of the Effective Potential, *Phys. Rev. D* **9**, 1686 (1974), <https://link.aps.org/abstract/PRD/v9/i6/p1686>.

- [JCG04] S. Juchem, W. Cassing and C. Greiner, Nonequilibrium quantum field dynamics and off-shell transport for ϕ^4 theory in (2+1)-dimensions, Nucl. Phys. A **743**, 92 (2004).
- [Kam11] A. Kamenev, *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, Sao Paulo, Delhi, Tokyo, Mexico City (2011).
- [KB61] L. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, New York (1961).
- [KG06] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory; Principles and Applications*, Cambridge University Press, 2 edn. (2006).
- [KIV01] J. Knoll, Y. B. Ivanov and D. N. Voskresensky, Exact conservation laws of the gradient expanded Kadanoff-Baym equations, Ann. Phys. **293**, 126 (2001),
<https://doi.org/10.1006/aphy.2001.6185>.
- [Kub57] R. Kubo, Statistical mechanical theory of irreversible processes. 1. General theory and simple applications in magnetic and conduction problems, J. Phys. Soc. Jap. **12**, 570 (1957),
<https://jpsj.ipap.jp/link?JPSJ/12/570>.
- [LeB96] M. LeBellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne (1996).
- [LM96] M. Le Bellac and H. Mabilat, Real time Feynman rules at finite temperature, Phys. Lett. B **381**, 262 (1996),
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(96\)00604-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00604-1).
- [LMB04] M. LeBellac, F. Mortessagne and G. G. Batrouni, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town (2004).
- [Lv87] N. P. Landsmann and C. G. van Weert, Real- and Imaginary-time Field Theory at Finite Temperature and Density, Physics Reports **145**, 141 (1987),
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(87\)90121-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(87)90121-9).

- [LV16] M. Laine and A. Vuorinen, *Basics of Thermal Field Theory*, vol. 925 of *Lecture Notes in Physics*, Springer (2016),
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-31933-9>.
- [LW60] J. M. Luttinger and J. C. Ward, Ground state energy of a many fermion system. 2, *Phys. Rev.* **118**, 1417 (1960),
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.118.1417>.
- [Mab97] H. Mabilat, Derivation of the real time formalism from first principles in thermal field theory, *Z. Phys. C* **75**, 155 (1997),
<https://doi.org/10.1007/s002880050457>.
- [Mat55] T. Matsubara, A new Approach to Quantum Statistical Mechanics, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955),
<https://ptp.ipap.jp/link?PTP/14/351>.
- [MS59] P. C. Martin and J. S. Schwinger, Theory of Many-Particle Systems I, *Phys. Rev.* **115**, 1342 (1959),
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.1342>.