

Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik 2

Vorlesung 6: Diffusion schwerer Quarks im QGP

Hendrik van Hees

20. Mai 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Die Fokker-Planck-Gleichung	2
2 Langevin-Gleichungen und Simulation schwerer Quarks im QGP	5
3 Heavy-Quark-Wechselwirkungen im QGP	7
4 Anwendung auf Schwerionenphänomenologie	12
5 References	15

Motivation

- nach kurzer Thermalisierungszeit hydrodynamische kollektive Bewegung von stark gekoppelten partonischen Freiheitsgraden \Rightarrow sQGP
- Schwere Quarks (charm und bottom)
 - werden in primordialen harten Stößen erzeugt
 - wegen größerer Massen ($m_c \simeq 1.3$ GeV, $m_B \simeq 4.2$ GeV \Rightarrow nicht voll äquilibriert
 - **Diffusion schwerer Quarks** \Rightarrow „Sonden“ für Transporteigenschaften des QGP
- Vereinfachte Transportgleichung: partielle DGL **Fokker-Planck-Gleichung** (Brownsche Bewegung a la Einstein 1905)

- kann gut mit stochastischer DGL (**Langevin-Gleichung**) simuliert werden
- Reibungs- und Diffusionskoeffizienten im QGP
- Literatur: [RH09]

1 Die Fokker-Planck-Gleichung

Die Fokker-Planck-Gleichung

Relativistische Boltzmann-Gleichung

- **Streuprozesse schwerer Quarks** (charm und bottom) im Quark-Gluon-Plasma mit relativistischer **Boltzmann-Gleichung**
- $f_Q(t, \vec{x}, \vec{p})$: Phasenraumverteilung der schweren Quarks
- elastische Zweiteilchenstöße (im QGP $Q + g \rightarrow Q + g$, $Q + q \rightarrow Q + q$, $Q + \bar{q} \rightarrow Q + \bar{q}$)

$$df_Q = dt \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) f_Q$$

- Änderung der Phasenraumverteilung aufgrund von „Drift“ der Teilchen
- Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{p}/E_{\vec{p}}$ mit $E_{\vec{p}} = \sqrt{m_Q^2 + \vec{p}^2}$
- äußere Kraft \vec{F}

- Änderung wegen **Stößen mit Teilchen im Medium**

$$df_Q = C[f_Q] = \int d^3 \vec{k} \left[\underbrace{w(\vec{p} + \vec{k}, \vec{k}) f_Q(t, \vec{x}, \vec{p} + \vec{k})}_{\text{gain}} - \underbrace{w(\vec{p}, \vec{k}) f_Q(t, \vec{x}, \vec{p})}_{\text{loss}} \right]$$

- $w(\vec{p}, \vec{k})$: **Übergangsrate** für Stöße eines **schweren Quarks** mit Impuls \vec{p} mit einem Teilchen aus dem Medium und Impulsübertrag \vec{k}

Übergangsraten

- Zusammenhang mit Streuquerschnitten **mikroskopischer Streuprozesse** (QFT!)
- z.B. Streuung mit leichtem Quark

$$w(\vec{p}, \vec{k}) = \gamma_q \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} f_q(\vec{q}) v_M(\vec{p}, \vec{q} \rightarrow \vec{p} - \vec{k}, \vec{q} + \vec{k}) \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

- $\gamma_q = 2 \times 3 = 6$: Spin-Farb-Entartungsfaktor
- $v_M := \sqrt{(\vec{p} \cdot \vec{q})^2 - (m_Q m_q)^2} / (E_Q E_q)$; Møller-Geschwindigkeit
- mit **invariantem Matrixelement** aus QFT

$$C[f_Q] = \frac{1}{2E_Q} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2E_q} \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \int \frac{d^3 \vec{q}'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} \\ \times \frac{1}{\gamma_Q} \sum_{c,s} |\mathcal{M}_{(\vec{p}', \vec{q}') \leftarrow (\vec{p}, \vec{q})}|^2 \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p' - q') [f_Q(\vec{p}') f_q(\vec{q}') - f_Q(\vec{p}) f_q(\vec{q})]$$

- $\vec{p}, \vec{q} (\vec{p}', \vec{q}')$ Impulse im Anfangs- (Endzustand) des Streuprozesses von **schwerem** und **leichtem** quark
- Impulsübertrag $\vec{k} = \vec{q}' - \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$

- addiere Beiträge aller relevanten Streuprozesse

Die Fokker-Planck-Gleichung

- **schwere Quarks** \leftrightarrow **leichte Quarks/Antiquarks/Gluonen**: Impulsüberträge auf schweres Quark klein
- $w(\vec{p} + \vec{k}, \vec{k})$: konzentriert auf Region um $\vec{k} = 0$
- Entwicklung des **Stoßterms** um $\vec{k} = 0$ [Sve88]

$$w(\vec{p} + \vec{k}, \vec{k}) f_Q(\vec{p} + \vec{k}, \vec{k}) \simeq w(\vec{p}, \vec{k}) f_Q(\vec{p}) + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} [w(\vec{p}, \vec{k}) f_Q(\vec{p})] \\ + \frac{1}{2} k_i k_j \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} [w(\vec{p}, \vec{k}) f_Q(\vec{p})]$$

- Stoßterm:

$$C[f_Q] = \int d^3 \vec{k} \left[k_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right] [w(\vec{p}, \vec{k}) f_Q(\vec{p})].$$

Die Focker-Planck-Gleichung

- Boltzmann-Gleichung \Rightarrow vereinfacht sich zu **Fokker-Planck-Gleichung**

$$\partial_t f_Q(t, \vec{x}, \vec{p}) + \frac{\vec{p}}{E_{\vec{p}}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} f_Q(t, \vec{x}, \vec{p}) = \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ A_i(\vec{p}) f_Q(t, \vec{x}, \vec{p}) + \frac{\partial}{\partial p_j} [B_{ij}(\vec{p}) f_Q(t, \vec{p})] \right\}$$

- mit **Reibungs-** and **Diffusionskonstanten**

$$A_i(\vec{p}) = \int d^3 \vec{k} k_i w(\vec{p}, \vec{k}), \quad B_{ij}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} k_i k_j w(\vec{p}, \vec{k})$$

- **leichte Quarks und Gluonen im (lokalen) thermischen Gleichgewicht:** Koeffizienten definiert im **(lokalen) Ruhssystem des Fluidelements**
- Materie homogen und isotrop \Rightarrow

$$A_i(\vec{p}) = A(p) p_i, \quad B_{ij}(\vec{p}) = B_0(p) P_{ij}^{\perp} + B_1(p) P_{ij}^{\parallel}$$

with $P_{ij}^{\parallel}(\vec{p}) = \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2}, \quad P_{ij}^{\perp}(\vec{p}) = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2}$

Physikalische Bedeutung der Transportkoeffizienten

- $\vec{F} = 0$ und Integration über Raum: $F_Q(t, \vec{p})$ Impulsdichte

$$F_Q(t, \vec{p}) = \int_V d^3 \vec{x} f_Q(t, \vec{x}, \vec{p}),$$

$$\int_V d^3 \vec{x} \operatorname{div}_{\vec{x}} \left[\frac{\vec{p}}{E_{\vec{p}}} f(t, \vec{x}, \vec{p}) \right] = \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \left[\frac{\vec{p}}{E_{\vec{p}}} f(t, \vec{x}, \vec{p}) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_Q(t, \vec{p}) = \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ A_i(\vec{p}) F_Q(t, \vec{p}) + \frac{\partial}{\partial p_j} [B_{ij}(\vec{p}) F_Q(t, \vec{p})] \right\}$$

- einfachster Fall: **nichtrelativistischer Limes** $A(\vec{p}) = A = \text{const}$, $B_0(\vec{p}) = B_1(\vec{p}) = B = \text{const}$
- ruhendes Wärmebad im globalen thermischen Gleichgewicht

- „Green Funktion“: Lösung der FP-Gleichung mit Anfangsbedingung $F_Q(0, \vec{p}) = \delta^{(3)}(\vec{p})$:

$$F_Q(t, \vec{p}) = \left\{ \frac{A}{2\pi D} [1 - \exp(-2\gamma t)] \right\}^{-3/2} \times \exp \left[-\frac{A}{2B} \frac{[\vec{p} - \vec{p}_0 \exp(-At)]^2}{1 - \exp(-2\gamma t)} \right]$$

Physikalische Bedeutung der Transportkoeffizienten

- Lösung: **Gauß-Verteilung** mit

$$\langle \vec{p}(t) \rangle = \vec{p}_0 \exp(-At), \quad \Delta \vec{p}^2(t) = \langle \vec{p}^2 \rangle - \langle \vec{p} \rangle^2 = \frac{3B}{A} [1 - \exp(-2At)].$$

- **A: Reibungskoeffizient** \Rightarrow **Dissipation**
- $1/A$: **Relaxationszeit** zum Erreichen des **Gleichgewichts** $\langle \vec{p}(t) \rangle \rightarrow 0$
- **B: Impulsraum-Diffusionskoeffizient**
- Maß für Größe der **Impulsfluktuationen** (resultiert aus vielen **unkorrelierten Stößen** des **schweren Quarks** with **leichten Teilchen im Medium**)
- \Rightarrow Effektive Beschreibung der Stöße über **Zufallskräfte** („weißes Rauschen“, s.u.)

- **Gleichgewichtslimes** ($t \rightarrow \infty$)

$$F_Q(t, \vec{p}) \underset{t \rightarrow \infty}{\cong} \left(\frac{2\pi B}{A} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{A \vec{p}^2}{2B} \right)$$

- muss (nichtrelativistische) **Maxwell-Boltzmann-Verteilung** sein \Rightarrow Einsteins Dissipations-Fluktuations-Theorem (1905):

$$B = m_Q A T$$

- T : durch Wärmebad (QGP) vorgebene Temperatur

2 Langevin-Gleichungen und Simulation schwerer Quarks im QGP

Langevin-Gleichungen und Simulation schwerer Quarks im QGP

Beschreibung durch stochastischen Langevin-Prozess

- **Langevin-Process: Reibungskraft** + **Gaußverteilte Zufallskraft**
- im lokalen Ruhssystem des Wärmebads

$$d\vec{x} = \frac{\vec{p}}{E_p} dt,$$

$$d\vec{p} = -A\vec{p} dt + \hat{C} \vec{w} \sqrt{dt}$$

- $\vec{w}(t)$: Gauß-verteilte Zufallsvariable

$$\langle \vec{w}(t) \rangle = 0, \quad \langle w_j(t) w_k(t') \rangle = \delta(t - t')$$

- $\hat{C} = \hat{C}^t$: Kovarianzmatrix der Zufallskraft
- stochastischer Prozess hängt von Wahl des **Impulsarguments** von \hat{C} ab

$$\hat{C} \rightarrow \hat{C}(t, \vec{x}, \vec{p} + \xi d\vec{p}), \quad \xi \in [0, 1]$$

- übliche Wahl von $\xi \in [0, 1]$
 - $\xi = 0$: Präpunkt-Ito
 - $\xi = 1/2$: Stratonovich (Mittelpunkt-Ito)
 - $\xi = 1$: Postpunkt-Ito (Hänggi-Klimontovich) realization

Langevin \leftrightarrow Fokker-Planck

- Phasenraumverteilung **schweren Quarks**

$$f_Q(t, \vec{x}, \vec{p}) = \langle \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}'(t)] \delta^{(3)}[\vec{p} - \vec{p}'(t)] \rangle \quad (1)$$

- Mittelung über viele Realisierungen (**Ensemble**) von Langevin-Prozessen
- $[\vec{x}'(t), \vec{p}'(t)]$: Phasenraumtrajektorien vermöge **stochastischem Langevin-Prozess**

$$d\vec{x} = \frac{\vec{p}}{E_p} dt,$$

$$d\vec{p} = -A\vec{p} dt + \hat{C} \vec{w} \sqrt{dt} \quad (2)$$

- Zeitschritt in (1) vermittelt (2) (nächste Übung!)

$$\frac{\partial f_Q}{\partial t} + \frac{p_j}{E} \frac{\partial f_Q}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left[\left(A p_j - \xi C_{lk} \frac{\partial C_{jk}}{\partial p_l} \right) f_Q \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_k} (C_{jl} C_{kl} f_Q)$$

$$\Rightarrow C_{jk} = \sqrt{2B_0} P_{jk}^\perp + \sqrt{2B_1} P_{jk}^\parallel$$

- Fokker-Planck-Gleichung **aber welcher Wert für ξ ?**

Langevin \leftrightarrow Fokker-Planck

- Wahl von ξ : $f_Q \rightarrow$ **relativistische Maxwell-Boltzmann-Verteilung** for $t \rightarrow \infty$:

$$f_Q^{\text{eq}}(\vec{p}) \propto \exp(-\sqrt{\vec{p}^2 + m_Q^2}/T)$$

- Langevin-Prozess $B_0 = B_1 = D(E) \Rightarrow C_{jk} = \sqrt{2D(E)} \delta_{jk}$
- **MB-Verteilung** Lösung der **stationären FP-Gleichung** \Rightarrow

$$A(E)ET - D(E) + (1 - \xi)TD'(E) \stackrel{!}{=} 0$$

- einfachste Wahl: $\xi = 1$ (Postpunkt-Ito)
- dann einfache Einsteinsche **Dissipations-Fluktuations-Relation**

$$D = TEA$$

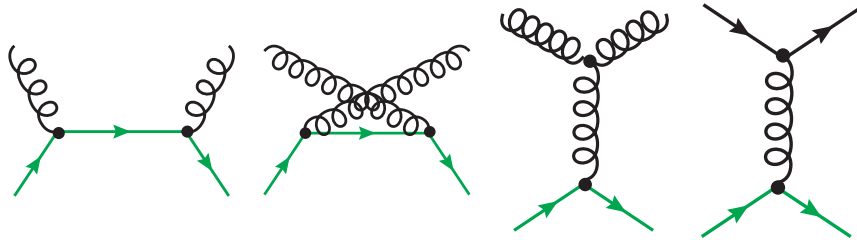
- für in Modellen berechnete FP-Koeffizienten: **Relation** oft nicht gut erfüllt für B_1
- \Rightarrow verwende $\xi = 1$ and $B_1 = TEA$
- numerischer Test: Langevin-Simulation liefert korrekten Gleichgewichtslimes

3 Heavy-Quark-Wechselwirkungen im QGP

Heavy-Quark-Wechselwirkungen im QGP

Elastische pQCD-Streuprozesse

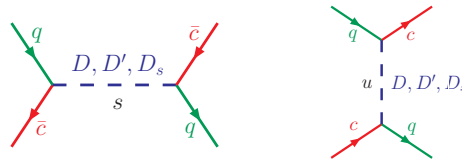
- Matrixelemente niedrigster Ordnung [Com79]



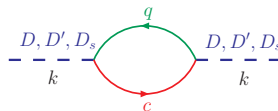
- **Debye-Masse** für t -Kanal Gluonaustausch $\mu_g = gT$, $\alpha_s = 0.4$
- nicht ausreichend, um Daten von Schwerionenstößen zu verstehen [MT05]

Nichtperturbative Wechselwirkungen: Resonanzstreuung

- Grundidee: Bildung von D- und B-Meson-artigen **Resonanzen** im QGP
- chirale Symmetrie für leichte Quarks und effektive Theorie für schwere Quarks
- **elastische Streuung** zwischen **schweren** und leichten (Anti-)Quarks [HGR06]



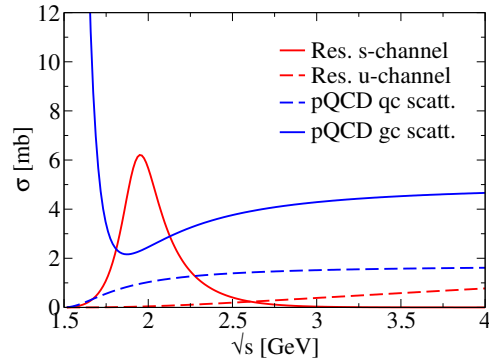
- D- and B-meson like resonances in sQGP



- parameters
 - $m_D = 2 \text{ GeV}$, $\Gamma_D = 0.4 \dots 0.75 \text{ GeV}$
 - $m_B = 5 \text{ GeV}$, $\Gamma_B = 0.4 \dots 0.75 \text{ GeV}$

[HMGR09]

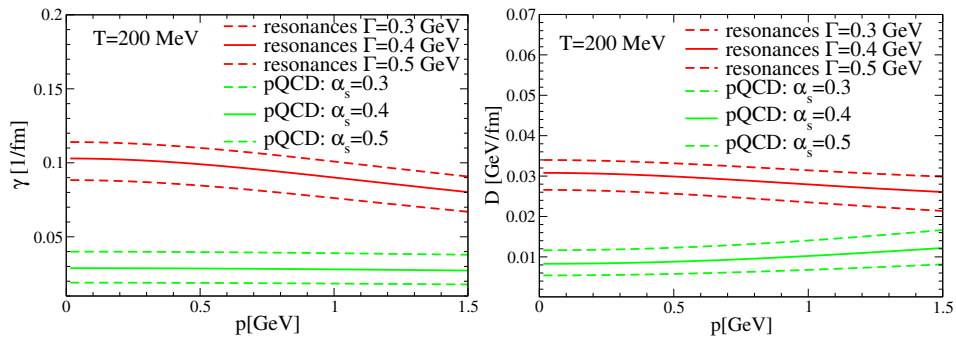
Streuquerschnitte



- totaler pQCD- und Resonanz-Streuquerschnitt: **vergleichbar**
- pQCD-Querschnitt in Vorwärtsrichtung gepaekt \leftrightarrow Resonanz-Streuquerschnitt isotrop
- Resonanz-Streuung effektiver für Reibungs- und Diffusionskoeffizienten

Transport-Koeffizienten: pQCD- vs. Resonanzstreuung

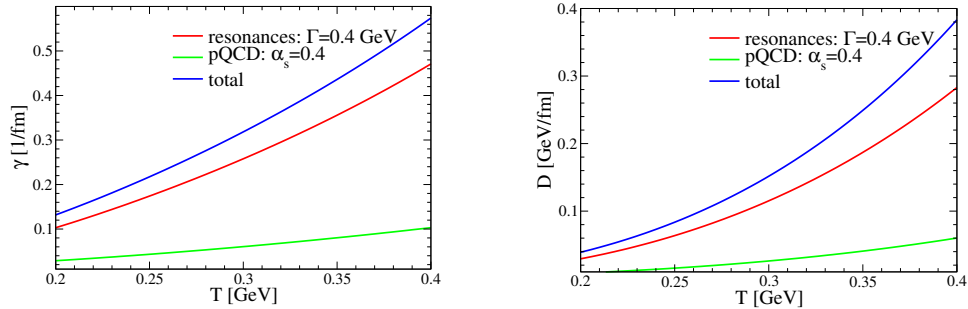
- Dreierimpulsabhängigkeit:



- Resonanz-Streubeiträge um Faktor $\sim 2 \dots 3$ größer als von pQCD-Prozessen!

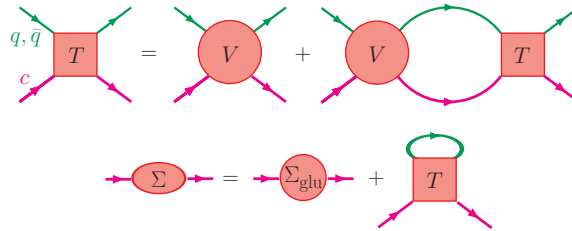
Transport coefficients: pQCD vs. resonance scattering

- Temperature dependence



T-Matrix-Rechnung

- Brueckner-Beschreibung von Qq - und $Q\bar{q}$ -Streuung im medium

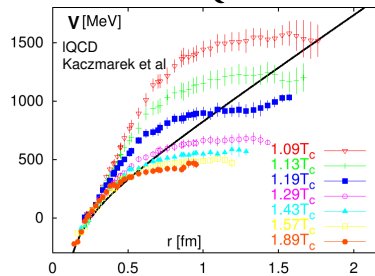


- V : statisches $q\bar{q}$ -Potential aus Gitter-QCD (F and U)
- Reduktion: von 4D Bethe-Salpeter \rightarrow 3D Lipmann-Schwinger
- S - und P -Wellen in Partialwellenentwicklung des Streuquerschnitts
- Zusammenhang mit **invarianten Matrixelementen**

$$\sum |\mathcal{M}(s)|^2 \propto \sum_q d_a (|T_{a,l=0}(s)|^2 + 3|T_{a,l=1}(s)|^2 \cos^2 \theta_{\text{cm}})$$

[HMGR08]

Statische Quark-Potentiale aus Gitter-QCD



- Farb-Singlett freie Energie von IQCD \rightarrow innere Energie

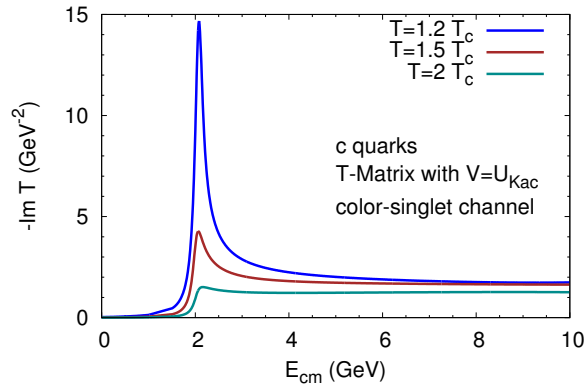
$$U_1(r, T) = F_1(r, T) - T \frac{\partial F_1(r, T)}{\partial T},$$

$$V_1(r, T) = U_1(r, T) - U_1(r \rightarrow \infty, T)$$

- für andere Farbkanäle „SU(3)-Casimir-Skalierung“ konfinierender Teil „farbblind“ [RRH⁺09]

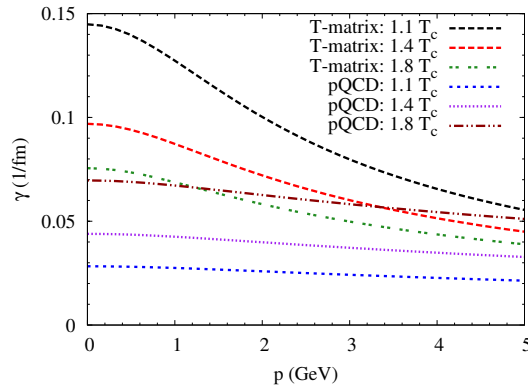
$$V_3 = \frac{1}{2} V_1, \quad V_6 = -\frac{1}{4} V_1, \quad V_8 = -\frac{1}{8} V_1$$

Ergebnisse der T-Matrix-Rechnung



- **Bildung von Resonanzen** bei niedrigeren Temperaturen $T \simeq T_c$
- Schmelzen der Resonanzen bei höheren T
- modellunabhängiger Zugang für $Qq, Q\bar{q}$ -Streuung!

Transport-Koeffizienten

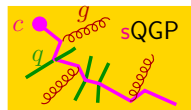
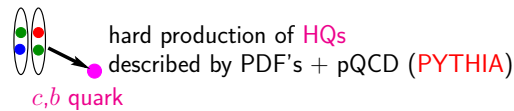


- T -matrix: Transportkoeffizienten aus Resonanzstreuprozessen **nehmen ab** mit steigender T
- nichtperturbativer Reibungskoeffizient $A_{\text{non-pert}} \simeq 1/(7 \text{ fm}/c) \simeq 4A_{\text{pQCD}}$
- mit **Potential aus freier Energie F** wesentlich kleiner!

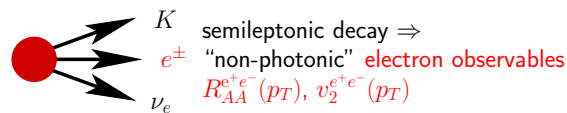
4 Anwendung auf Schwerionenphänomenologie

Anwendung auf Schwerionenphänomenologie

Schwere Quarks in Schwerionenstößen

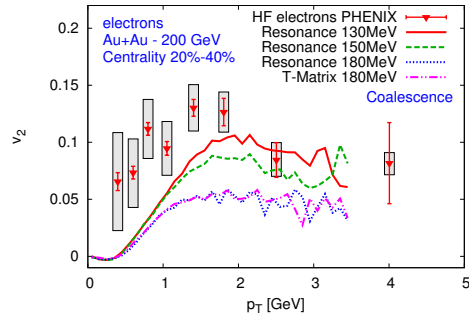
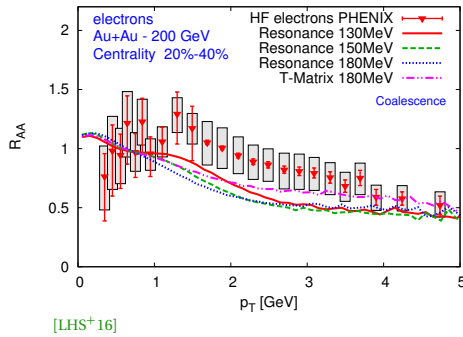


HQ rescattering in QGP: Langevin simulation
drag and diffusion coefficients from
microscopic model for HQ interactions in the sQGP



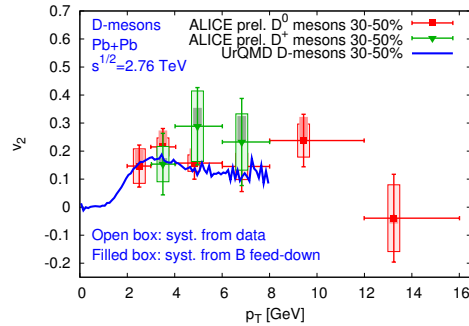
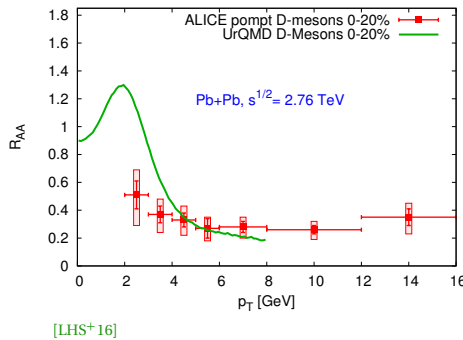
"Nichtphotonische Elektronen" am RHIC

- Einzelelektronen aus semileptonischen Zerfällen von D- und B-Mesonen
- bilde D- und B-Mesonen via **$Q\bar{q}$ -Koaleszenz**
- verwende PYTHIA event generator für semileptonische Zerfälle
- Vergleich mit PHENIX-Daten (200 AGeV Au-Au collisions)



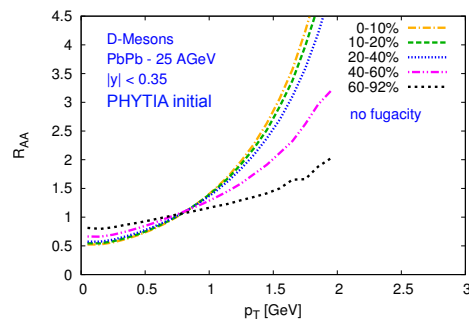
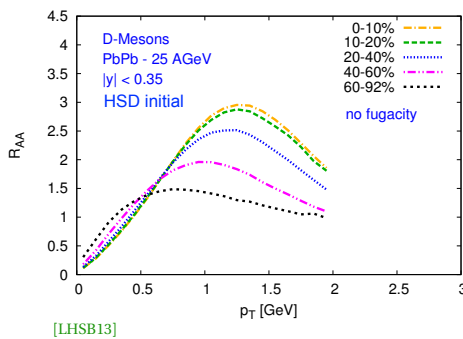
D-Mesonen am LHC

- D via $Q\bar{q}$ -Koaleszenz
- Vergleich mit D-Mesonen-Daten von ALICE (2.76 ATeV Pb-Pb collisions)



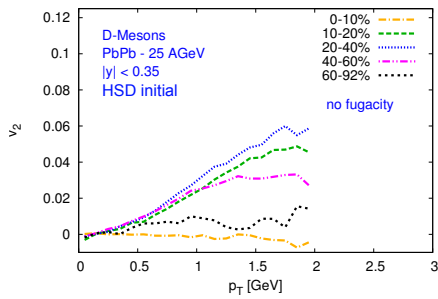
D-Mesonen bei FAIR

- D via $Q\bar{q}$ -Koaleszenz
- starke Abhängigkeit von HQ-Anfangsverteilungen (verwende Abschätzungen von HSD and PYTHIA)

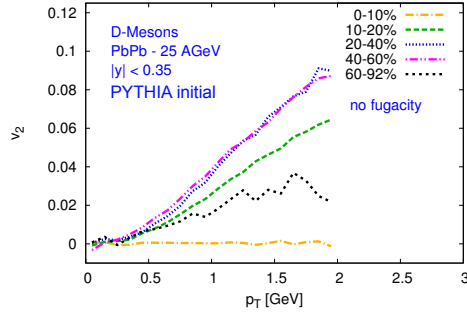


D-Mesonen bei FAIR

- D via $Q\bar{q}$ -Koaelszenz
- starke Abhängigkeit von HQ-Anfangsverteilungen (verwende Abschätzungen von HSD and PYTHIA)

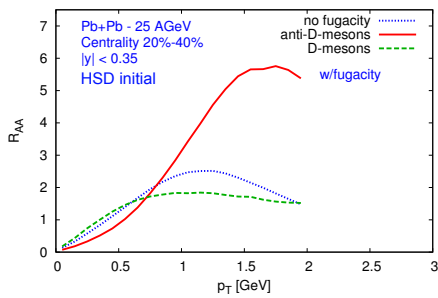


[LHSB13]

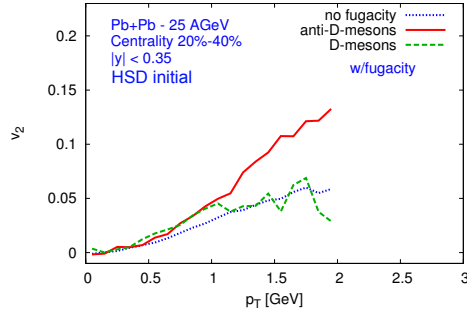


D-Mesonen bei FAIR

- D via $Q\bar{q}$ -Koaelszenz
- starke Abhängigkeit von HQ-Anfangsverteilungen (verwende Abschätzungen von HSD and PYTHIA)
- großes μ_B im Resonanz-Modell: \bar{c} hat höheren Reibungskoeffizienten als c



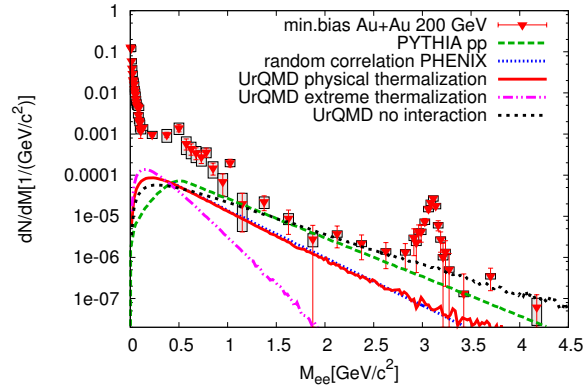
[LHSB13]



Dileptonen von korrelierten $D\bar{D}$ -Zerfällen

- für $m_\phi \lesssim M_{\ell+\ell^-} \lesssim m_{J/\psi}$: Dileptonen vom thermalisierten QGP and von correlated $D\bar{D}$ decays

- Mediummodifikationen von D und \bar{D} zerstören Korrelationen



[LHSB13]

5 References

Bibliography

Literatur

- [Com79] B. L. Combridge, Associated production of heavy flavour states in $\bar{p}p$ and p interactions: Some QCD estimates, Nucl. Phys. B **151**, 429 (1979).
URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90449-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90449-8)
- [HGR06] H. van Hees, V. Greco, R. Rapp, Heavy-quark probes of the quark-gluon plasma at RHIC, Phys. Rev. C **73**, 034913 (2006).
- [HMGR08] H. van Hees, M. Mannarelli, V. Greco, R. Rapp, Nonperturbative Heavy-Quark Diffusion in the Quark-Gluon Plasma, Phys. Rev. Lett. **100**, 192301 (2008).
URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.192301>
- [HMGR09] H. van Hees, M. Mannarelli, V. Greco, R. Rapp, T-matrix approach to heavy quark diffusion in the QGP, Eur. Phys. J. **C61**, 799 (2009).
URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-008-0838-5>
- [LHS⁺16] T. Lang, et al., Heavy quark transport in heavy ion collisions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider and at the CERN Large Hadron Collider within the UrQMD hybrid

model, Phys. Rev. C **93**, 014901 (2016).
URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.93.014901>

- [LHSB13] T. Lang, H. van Hees, J. Steinheimer, M. Bleicher, Elliptic flow and nuclear modification factors of D-mesons at FAIR in a Hybrid-Langevin approach (2013).
- [MT05] G. D. Moore, D. Teaney, How much do heavy quarks thermalize in a heavy ion collision?, Phys. Rev. C **71**, 064904 (2005).
URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.71.064904>
- [RH09] R. Rapp, H. van Hees, Heavy Quarks in the Quark-Gluon Plasma (2009), published in R. C. Hwa, X.-N. Wang (Ed.), Quark Gluon Plasma 4, World Scientific, p. 111.
URL <https://arxiv.org/abs/0903.1096>
- [RRH⁺09] R. Rapp, et al., Nonperturbative Heavy-Quark Interactions in the QGP, Nucl. Phys. A **830**, 861C (2009).
- [Sve88] B. Svetitsky, Diffusion of charmed quarks in the quark-gluon plasma, Phys. Rev. D **37**, 2484 (1988).
URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.37.2484>