

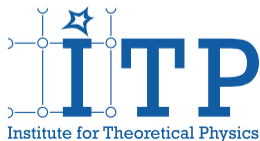
Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik 2

Vorlesung 5: Statistisches Hadronisierungsmodell

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

18. Mai 2026



Outline

Feuerballevolution (Bjorken-Modell)

Thermisches Hadronisierungsmodell

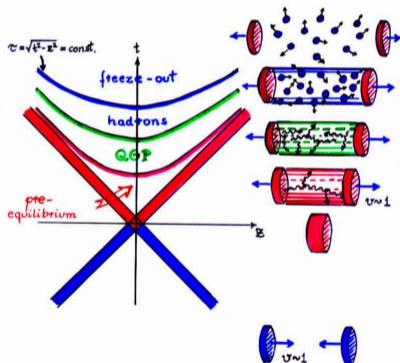
Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

References

Feuerballevolution (Bjorken-Modell)

Bjorken-Lösung für ideales Fluid \Rightarrow Übung 5

The space-time picture:



Below certain temperature T_f hadrons freeze-out



Below certain temperature T_c QGP hadronizes



... QGP



Leave in their wake highly excited quark-gluon matter which thermalizes ($\text{Kn} \sim \lambda/L \ll 1!$) and becomes a ...



Highly Lorentz-contracted nuclei pass through each other

von D. Rischke, Kolloquiumsvortrag, Universität Jyväskylä 2016

Feuerballevolution (Bjorken-Modell)

- ▶ Abschätzung der **Lebensdauer des Feuerballs am LHC**
 - ▶ Pb-Pb-Stöße mit $\sqrt{s} = 20 \text{ GeV}$
 - ▶ Energiedichte in einem Bleikern in Ruhe: $\epsilon_{\text{Pb}} \simeq 208 m_{\text{N}} / V \simeq 0.13 \text{ GeV}/\text{fm}^3$
($m_{\text{N}} \simeq 0.94 \text{ GeV}$, $R_{\text{Pb}} = 1.2 A^{1/3} = 7.1 \text{ fm}$)
 - ▶ $\gamma = \sqrt{s}(2m_{\text{N}})$
 - ▶ Energiedichte beim Überlapp (im CM-System);
 $\epsilon_{\text{CM}} = 2\gamma^2 \epsilon_{\text{Pb}} = 2s / (4m_{\text{Pb}}^2) \epsilon_{\text{Pb}} = 2.1 \cdot 10^6 \text{ GeV}/\text{fm}^3$
 - ▶ ultrarelativistische Zustandsgleichung: $P = \epsilon/3$
 - ▶ $\epsilon(\tau) = \epsilon_{\text{CM}}(\tau_0/\tau)^{4/3} \stackrel{!}{=} \epsilon_{\text{Pb}}$
 - ▶ $\tau \simeq 30 \text{ fm}/c$

Thermisches Hadronisierungsmodell

- ▶ Literatur: [BMRS03]
- ▶ hochenergetischer (zentraler) Schwerionenstoß: **viele Teilchen**
- ▶ am „chemischen Freeze-Out“ **viele Teilchen**
- ▶ **großkanonische Beschreibung** hinreichend genau
- ▶ erhaltene „Ladungen“: **Baryonenzahl, Strangeness, elektrische Ladung**

$$f_i = \frac{1}{\lambda_i \exp(\beta E) \pm 1}, \quad \lambda_i = \exp[\beta(\mu_B B_i + S_i \mu_S + \mu_Q Q_i)]$$

- ▶ $\beta = 1/T$, T: Temperatur, λ_i : Fugazität
- ▶ i : numeriert Teilchenarten durch
- ▶ Baryonen: Fermi-Dirac-Statistik, Mesonen: Bose-Einstein-Statistik

Thermisches Hadronisierungsmodell

- ▶ Zustandssumme:

$$\begin{aligned} Z_i &= \text{Tr} \exp\{-\beta[\mathbf{H}_i - (\mu_B B_i + S_i \mu_S + \mu_Q Q_i) \mathbf{N}_i]\} \\ &= \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{N}) \end{aligned}$$

$$\ln Z(T, V, \vec{\mu}) = \sum_i \ln Z_i(T, V, \vec{\mu})$$

$$\ln Z_i(T, V, \vec{\mu}) = \frac{VT g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty dp (\pm p^2) \ln[1 \pm \lambda_i \exp(-\beta E_i)], \quad E_i = \sqrt{m_i^2 + p^2}.$$

- ▶ Fugazität

$$\lambda_i = \exp(-\alpha) = \exp[+\beta(\mu_B B_i + S_i \mu_S + \mu_Q Q_i)]$$

- ▶ Taylorentwicklung des Logarithmus

$$\ln Z_i(T, V, \vec{\mu}) = \frac{VT g_i}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{k+1}}{k^2} \lambda_i^k K_2(k\beta m_i)$$

Thermisches Hadronisierungsmodell

- ▶ K_2 : modifizierte Bessel-Funktion [CH10]

$$K_j(x) = \int_0^\infty dz \cosh(jz) \exp(-x \cosh z)$$

- ▶ Beitrag von $k = 1$: **Maxwell-Boltzmann-Statistik** (i.a. gute Näherung außer für Pionen)
- ▶ nichtrelativistischer Limes (Maxwell-Boltzmann-Statistik)

$$\ln Z_i^{(\text{MB})}(T, V, \vec{\mu}) = \frac{V T g_i}{2\pi^2} \lambda_i K_2(\beta m_i) \underset{\beta m_i \rightarrow \infty}{\cong} \left(\frac{m}{2\pi\beta} \right)^{3/2} V g_i \lambda_i \exp(-\beta m)$$

- ▶ Teilchenzahldichte

$$n_i = \frac{\langle N_i \rangle_{\text{th}}}{V} = -\frac{1}{V} \partial_\alpha \ln Z_i = \frac{T g_i}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda_i^k m_i^2 K_2(k\beta m_i)$$

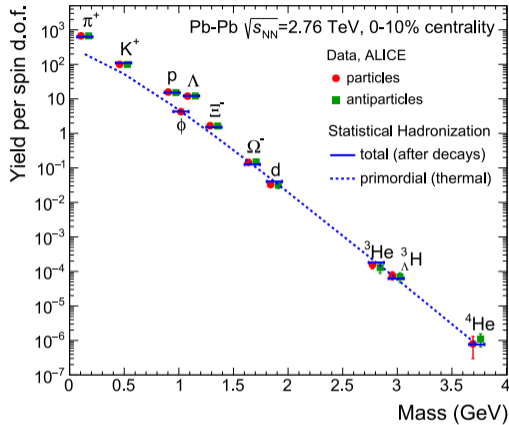
Thermisches Hadronisierungsmodell

- ▶ „Feed-Down“ von schnell zerfallenden Resonanzen: $j \rightarrow i$ beobachtetes Teilchen

$$\langle N_i \rangle = \langle N_i \rangle_{\text{th}} + \sum_j \Gamma_{j \rightarrow i} \langle N_j \rangle_{\text{th}}$$

- ▶ $\Gamma_{j \rightarrow i}$: Verzweigungsverhältnis für Zerfall von Resonanz j zum Teilchen i
- ▶ Beispiel: Schwerionenstoß am LHC: zentraler Pb+Pb-Stoß, $\sqrt{s} = 2.76A$ TeV

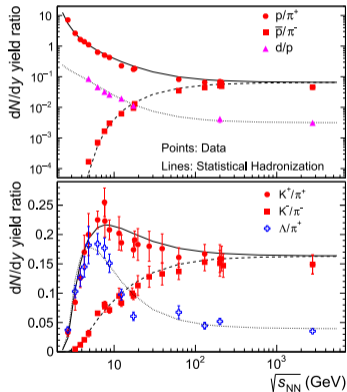
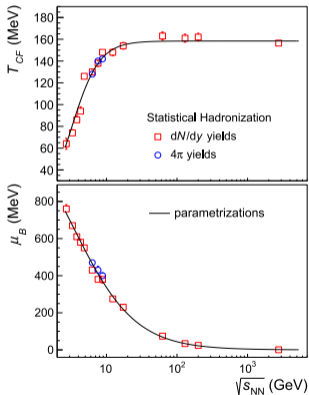
Thermisches Hadronisierungsmodell



- Fitergebnis: $T_{\text{ch}} = (156.6 \pm 1.7) \text{ MeV}$, $\mu_B = (0.7 \pm 3.8) \text{ MeV}$, $V(4175 \pm 380) \text{ fm}^3$

Thermisches Hadronisierungsmodell

- ▶ „Beam-energy scan“
 - ▶ für $\sqrt{s} \lesssim 6$ GeV Hadronen mit Strangeness $\langle N_i \rangle_{\text{th}} \ll 1$
 ⇒ benötige **kanonische Beschreibung** (s.u.)



[ABMRS26]

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

- ▶ für „**schwere**“ **Teilchen**: großkanonische mittlere Teilchenzahl $\langle N_i \rangle_{\text{th}} \lesssim 1$
- ▶ e.g., s-Quarks vs. u,d-Quarks \Rightarrow Hadronen mit Strangeness für Stoßenergien $\sqrt{s_{\text{NN}}} \lesssim 6 \text{ GeV}$ müssen mit kanonischer Thermodynamik behandelt werden
- ▶ exakte Anzahl und Erhaltung von $s\bar{s}$ -Paaren
- ▶ $c\bar{c}$ -Produktion: bis zu RHIC-Energien kanonisch; selbst bei LHC-Energien modifizierte großkanonische Behandlung mit **Charm-Fugazitätsfaktor** $\gamma_c \simeq 30$

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

- ▶ kanonische Behandlung von Strangeness (exakt analog für Charm) [KKL+01]
 - ▶ Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit τ **exakt** N_s $s\bar{s}$ -Paare im Feuerball enthalten sind: $P_{N_s}(\tau)$
 - ▶ betrachte Änderung der Paarzahl durch **binäre Stöße** $A + B \leftrightarrow s + \bar{s}$ (kann auch hadronisch sein!)
 - ▶ „**Netto-Strangeness**“ erhalten: $N_{\bar{s}} = N_s$ (Anfangszustand in AA -Stößen: keine Teilchen mit Strangeness vorhanden)
 - ▶ vereinfachte Behandlung via vereinfachter Boltzmann-Gleichung: **Master-Gleichung**
 - ▶ mittlere Gewinnrate: $G/V N_A N_B$ mit $G = \langle \sigma(A + B \rightarrow s + \bar{s}) v_{\text{rel}} \rangle$
 - ▶ mittlere Verlustrate $L/V N_s N_{\bar{s}} = L/V N_s^2$ mit $L = \langle \sigma(s + \bar{s} \rightarrow A + B) v_{\text{rel}} \rangle$ (Details \Rightarrow Übung 6)
 - ▶ A und B „u,d-Quarks/Hadronen“: können großkanonisch behandelt werden $N_{A/B} \rightarrow \langle N_{A/B} \rangle_{\text{th}}$

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

- ▶ im Folgenden $N_s = N_{\bar{s}} = n$: suche **Mastergleichung** für zeitliche Änderung von P_n
 - ▶ **Gewinn durch Stöße**: $(n+1) \rightarrow n$ (Rate $L/V(n+1)^2 P_{n+1}$)
oder $(n-1) \rightarrow n$ (Rate $G/V \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} P_{n-1}$)
 - ▶ **Verlust durch Stöße**: $n \rightarrow n-1$ (Rate $L/V n^2 P_n$)
oder $n \rightarrow n+1$ (Rate $G/V \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} P_n$)
 - ▶ mit

$$G \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} = \epsilon L$$

- ▶ \Rightarrow **Mastergleichung**

$$\begin{aligned} \dot{P}_n &= \frac{L}{V} (n+1)^2 P_{n+1} + \frac{G}{V} \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} P_{n-1} && \text{(Gewinn)} \\ &\quad - \frac{L}{V} n^2 P_n - \frac{G}{V} \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} P_n && \text{(Verlust)} \\ &= \frac{L}{V} \left[(n+1)^2 P_{n+1} - (n^2 + \epsilon) P_n + \epsilon P_{n-1} \right] \end{aligned}$$

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

- ▶ $P_{-1} = 0$ und Summe über n

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{P}_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \text{const} = 1$$

- ▶ $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$: unendliches gekoppeltes Differentialgleichungssystem!
- ▶ Trick: **erzeugende Funktion**

$$g(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\tau)$$

- ▶ multipliziere **Mastergleichung** mit x^n und summiere über n :

$$\partial_{\tau} g = \frac{L}{V} (1-x) (x \partial_x^2 g + \partial_x g - \epsilon g) \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{G}{L} \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}}$$

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

- ▶ Gleichgewichtslösung $\partial_\tau g = 0$

$$x \partial_x^2 g_{\text{eq}} + \partial_x g_{\text{eq}} - \epsilon g_{\text{eq}} = 0$$

- ▶ definiere

$$g_{\text{eq}}(x) = G[y(x)], \quad y(x) = 2\sqrt{\epsilon x}$$

$$y G''(y) + G'(y) - y G(y) = 0$$

- ▶ Lösung endlich für $y = 0$: **modifizierte Besselfunktion $CI_0(y)$**
- ▶ mit $g_{\text{eq}}(1) = 1$

$$g_{\text{eq}}(x) = \frac{I_0(2\sqrt{\epsilon x})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})}.$$

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

► [CH10]

$$I_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cos(k\varphi) \exp(x \cos \varphi) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

$$I_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \Gamma(j + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j + \alpha}.$$

► Für $\alpha = 0$

$$I_0(2\sqrt{\epsilon x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{(j!)^2} x^j$$

► mittlere Anzahl der $s\bar{s}$ -Paare

$$\langle N_s \rangle_{\text{th}}^{(\text{kan})} = g'_{\text{eq}}(x)|_{x=1} = \sqrt{\epsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\epsilon})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})}$$

► zur Interpretation: großkanonischer Limes

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

- ▶ falls $\langle N_s \rangle_{\text{th}} \gg 1 \Rightarrow$ kann bei Herleitung der **Mastergleichung** $N_{\bar{s}} = \langle N_{\bar{s}} \rangle_{\text{th}} = \langle N_s \rangle_{\text{th}}$ setzen
- ▶ ersetze in Mastergleichung $n^2 \rightarrow \langle N_s \rangle_{\text{th}} n$ und $(n+1)^2 \rightarrow \langle N_s \rangle_{\text{th}} (n+1)$
- ▶ **Mastergleichung im großkanonischen Limes**

$$\frac{d}{d\tau} P_n = \frac{L}{V} \left[\langle N_{\bar{s}} \rangle_{\text{th}} (n+1) P_{n+1} - (\langle N_{\bar{s}} \rangle_{\text{th}} n + \epsilon) P_n + \epsilon P_{n-1} \right]$$

- ▶ multipliziere mit n und summiere über n und verwende $\langle n \rangle = \langle N_{\bar{s}} \rangle_{\text{th}} = \langle N_s \rangle_{\text{th}}$

$$d_{\tau} \langle n \rangle = \frac{L}{V} (\epsilon - \langle n \rangle \langle N_s \rangle_{\text{th}}) \Rightarrow \langle n \rangle_{\text{eq}} = \langle N_s \rangle_{\text{th}} = \sqrt{\epsilon} \Rightarrow d_{\tau} \langle n \rangle = \frac{L}{V} \sqrt{\epsilon} (\sqrt{\epsilon} - \langle n \rangle)$$

- ▶ **Mastergleichung** mit $\langle N_{\bar{s}} \rangle_{\text{th}} = \sqrt{\epsilon}$

$$\frac{d}{d\tau} P_n = \frac{L}{V} \left[\epsilon (P_{n-1} - P_n) + (n+1) \sqrt{\epsilon} P_{n+1} - n \sqrt{\epsilon} P_n \right]$$

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

- ▶ gleiche Technik mit erzeugender Funktion wie bei kanonischer Rechnung:

$$\partial_\tau g = \frac{L}{V} \sqrt{\epsilon}(1-x)(\partial_x g - \sqrt{\epsilon}g)$$

- ▶ im Gleichgewicht $\partial_\tau g_{\text{eq}} = 0$:

$$g_{\text{eq}}(x) = \exp(-\sqrt{\epsilon}) \exp(x\sqrt{\epsilon})$$

⇒ Poisson-Verteilung

$$P_n^{(\text{eq})} = \frac{1}{n!} \partial_x^n g_{\text{eq}}(x) \Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{\epsilon}^n}{n!} \exp(-\sqrt{\epsilon}).$$

Bibliography

- [ABMRS26] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, K. Redlich, J. Stachel, Statistical hadronization: successes and some open issues, in *66th Cracow School of Theoretical Physics: Physics of Strong Interactions under Extreme Conditions* (2026).
URL <https://arxiv.org/abs/2604.07564>
- [BMRS03] P. Braun-Munzinger, K. Redlich, J. Stachel, Particle production in heavy ion collisions (2003).
URL <https://arxiv.org/abs/nucl-th/0304013>
- [CH10] W. Cassing, H. v. Hees, *Mathematische Methoden für Physiker*, Universität Gießen (2010).
URL <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/maphy.pdf>

Bibliography

- [KKL⁺01] C. M. Ko, et al., Kinetic equation with exact charge conservation, Phys. Rev. Lett. **86**, 5438 (2001).
URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5438>