

Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik 2

Vorlesung 5: Statistisches Hadronisierungsmodell

Hendrik van Hees

18. Mai 2026

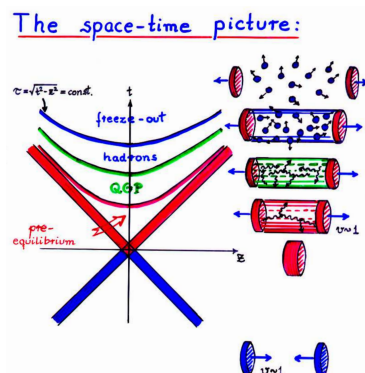
Inhaltsverzeichnis

1	Feuerballevolution (Bjorken-Modell)	1
2	Thermisches Hadronisierungsmodell	2
3	Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten	4
4	References	7

1 Feuerballevolution (Bjorken-Modell)

Feuerballevolution (Bjorken-Modell)

Bjorken-Lösung für ideales Fluid $\Rightarrow$ Übung 5



Below certain temperature T_f hadrons freeze-out



Below certain temperature T_c QGP hadronizes



... QGP



Leave in their wake highly excited quark-gluon matter which thermalizes ($K_n \sim \lambda/L \ll 1!$) and becomes a ...



Highly Lorentz-contracted nuclei pass through each other

von D. Rischke, Kolloquiumsvortrag, Universität Jyväskylä 2016

- Abschätzung der **Lebensdauer des Feuerballs am LHC**
 - Pb-Pb-Stöße mit $\sqrt{s} = 20 \text{ GeV}$
 - Energiedichte in einem Bleikern in Ruhe: $\epsilon_{\text{Pb}} \simeq 208 m_{\text{N}} / V \simeq 0.13 \text{ GeV/fm}^3$
($m_{\text{N}} \simeq 0.94 \text{ GeV}$, $R_{\text{Pb}} = 1.2 A^{1/3} = 7.1 \text{ fm}$)
 - $\gamma = \sqrt{s}(2m_{\text{N}})$
 - Energiedichte beim Überlapp (im CM-System); $\epsilon_{\text{CM}} = 2\gamma^2 \epsilon_{\text{Pb}} = 2s/(4m_{\text{Pb}}^2) \epsilon_{\text{Pb}} = 2.1 \cdot 10^6 \text{ GeV/fm}^3$
 - ultrarelativistische Zustandsgleichung: $P = \epsilon/3$
 - $\epsilon(\tau) = \epsilon_{\text{CM}}(\tau_0/\tau)^{4/3} \stackrel{!}{=} \epsilon_{\text{Pb}}$
 - $\tau \simeq 30 \text{ fm}/c$

2 Thermisches Hadronisierungsmodell

Thermisches Hadronisierungsmodell

- Literatur: [BMRS03]
- hochenergetischer (zentraler) Schwerionenstoß: **viele Teilchen**
- am „chemischen Freeze-Out“ **viele Teilchen**
- **großkanonische Beschreibung** hinreichend genau
- erhaltene „Ladungen“: **Baryonenzahl, Strangeness, elektrische Ladung**

$$f_i = \frac{1}{\lambda_i \exp(\beta E) \pm 1}, \quad \lambda_i = \exp[\beta(\mu_{\text{B}} B_i + S_i \mu_{\text{S}} + \mu_{\text{Q}} Q_i)]$$

- $\beta = 1/T$, T: Temperatur, λ_i : Fugazität
- i : numeriert Teilchenarten durch
- Baryonen: Fermi-Dirac-Statistik, Mesonen: Bose-Einstein-Statistik

- Zustandssumme:

$$\begin{aligned}
Z_i &= \text{Tr} \exp\{-\beta[\mathbf{H}_i - (\mu_B B_i + S_i \mu_S + \mu_Q Q_i) \mathbf{N}_i]\} \\
&= \text{Tr} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{N}) \\
\ln Z(T, V, \vec{\mu}) &= \sum_i \ln Z_i(T, V, \vec{\mu}) \\
\ln Z_i(T, V, \vec{\mu}) &= \frac{V T g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty dp (\pm p^2) \ln[1 \pm \lambda_i \exp(-\beta E_i)], \quad E_i = \sqrt{m_i^2 + p^2}.
\end{aligned}$$

- Fugazität

$$\lambda_i = \exp(-\alpha) = \exp[+\beta(\mu_B B_i + S_i \mu_S + \mu_Q Q_i)]$$

- Taylorentwicklung des Logarithmus

$$\ln Z_i(T, V, \vec{\mu}) = \frac{V T g_i}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{k+1}}{k^2} \lambda_i^k K_2(k\beta m_i)$$

- K_2 : modifizierte Bessel-Funktion [CH10]

$$K_j(x) = \int_0^\infty dz \cosh(jz) \exp(-x \cosh z)$$

- Beitrag von $k = 1$: **Maxwell-Boltzmann-Statistik** (i.a. gute Näherung außer für Pionen)

- nichtrelativistischer Limes (Maxwell-Boltzmann-Statistik)

$$\ln Z_i^{(\text{MB})}(T, V, \vec{\mu}) = \frac{V T g_i}{2\pi^2} \lambda_i K_2(\beta m_i) \underset{\beta m_i \rightarrow \infty}{\cong} \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{3/2} V g_i \lambda_i \exp(-\beta m)$$

- Teilchenzahldichte

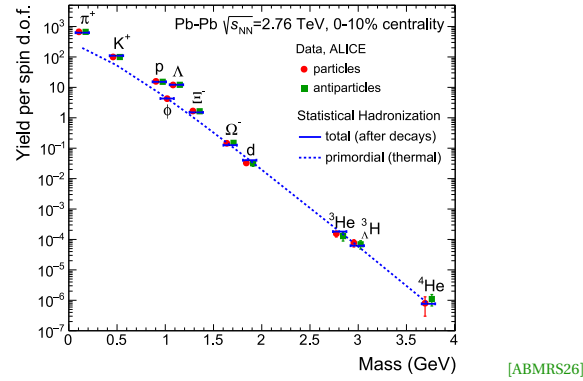
$$n_i = \frac{\langle N_i \rangle_{\text{th}}}{V} = -\frac{1}{V} \partial_\alpha \ln Z_i = \frac{T g_i}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \lambda_i^k m_i^2 K_2(k\beta m_i)$$

- „Feed-Down“ von schnell zerfallenden Resonanzen: $j \rightarrow i$ beobachtetes Teilchen

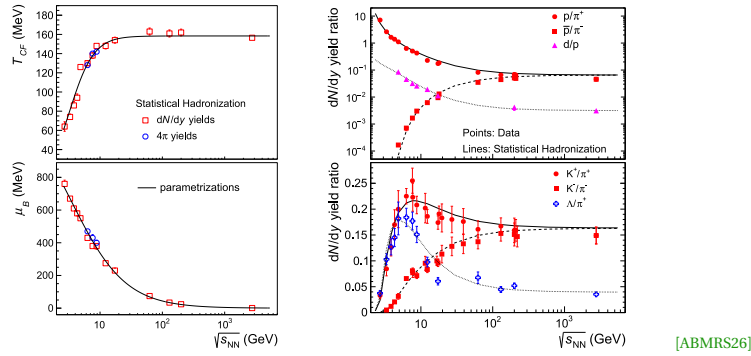
$$\langle N_i \rangle = \langle N_i \rangle_{\text{th}} + \sum_j \Gamma_{j \rightarrow i} \langle N_j \rangle_{\text{th}}$$

- $\Gamma_{j \rightarrow i}$: Verzweigungsverhältnis für Zerfall von Resonanz j zum Teilchen i

- Beispiel: Schwerionenstoß am LHC: zentraler Pb+Pb-Stoß, $\sqrt{s} = 2.76A$ TeV



- Fittergebnis: $T_{ch} = (156.6 \pm 1.7)$ MeV, $\mu_B = (0.7 \pm 3.8)$ MeV, $V(4175 \pm 380) \text{ fm}^3$
- „Beam-energy scan“
 - für $\sqrt{s} \lesssim 6$ GeV Hadronen mit Strangeness $\langle N_i \rangle_{th} \ll 1 \Rightarrow$ benötige **kanonische Beschreibung** (s.u.)



3 Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

Master- und Ratengleichungen für Teilchenhäufigkeiten

- für „schwere“ Teilchen: großkanonische mittlere Teilchenzahl $\langle N_i \rangle_{th} \lesssim 1$
- e.g., s-Quarks vs. u,d-Quarks $\Rightarrow$ Hadronen mit Strangeness für Stoßenergien $\sqrt{s_{NN}} \lesssim 6$ GeV müssen mit kanonischer Thermodynamik behandelt werden

- exakte Anzahl und Erhaltung von $s\bar{s}$ -Paaren
- $c\bar{c}$ -Produktion: bis zu RHIC-Energien kanonisch; selbst bei LHC-Energien modifizierte großkanonische Behandlung mit **Charm-Fugazitätsfaktor** $\gamma_c \simeq 30$
- kanonische Behandlung von Strangeness (exakt analog für Charm) [KKL⁺01]
 - Wahrscheinlichkeit, dass zur Zeit τ **exakt** N_s $s\bar{s}$ -Paare im Feuerball enthalten sind: $P_{N_s}(\tau)$
 - betrachte Änderung der Paarzahl durch **binäre Stöße** $A + B \leftrightarrow s + \bar{s}$ (kann auch hadronisch sein!)
 - „**Netto-Strangeness**“ erhalten: $N_{\bar{s}} = N_s$ (Anfangszustand in AA-Stößen: keine Teilchen mit Strangeness vorhanden)
 - vereinfachte Behandlung via vereinfachter Boltzmann-Gleichung: **Master-Gleichung**
 - mittlere Gewinnrate: $G/V N_A N_B$ mit $G = \langle \sigma(A + B \rightarrow s + \bar{s}) v_{\text{rel}} \rangle$
 - mittlere Verlustrate $L/V N_s N_{\bar{s}} = L/V N_s^2$ mit $L = \langle \sigma(s + \bar{s} \rightarrow A + B) v_{\text{rel}} \rangle$ (Details $\Rightarrow$ Übung 6)
 - A und B „u,d-Quarks/Hadronen“: können großkanonisch behandelt werden $N_{A/B} \rightarrow \langle N_{A/B} \rangle_{\text{th}}$
 - im Folgenden $N_s = N_{\bar{s}} = n$: suche **Mastergleichung** für zeitliche Änderung von P_n
 - * **Gewinn durch Stöße**: $(n+1) \rightarrow n$ (Rate $L/V(n+1)^2 P_{n+1}$) oder $(n-1) \rightarrow n$ (Rate $G/V \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} P_{n-1}$)
 - * **Verlust durch Stöße**: $n \rightarrow n-1$ (Rate $L/V n^2 P_n$) oder $n \rightarrow n+1$ (Rate $G/V \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} P_n$)
 - * mit

$$G \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} = \epsilon L$$

- $\Rightarrow$ **Mastergleichung**

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_n &= \frac{L}{V} (n+1)^2 P_{n+1} + \frac{G}{V} \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} P_{n-1} && \text{(Gewinn)} \\
 &\quad - \frac{L}{V} n^2 P_n - \frac{G}{V} \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}} P_n && \text{(Verlust)} \\
 &= \frac{L}{V} [(n+1)^2 P_{n+1} - (n^2 + \epsilon) P_n + \epsilon P_{n-1}]
 \end{aligned}$$

- $P_{-1} = 0$ und Summe über n

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{P}_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \text{const} = 1$$

- $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$: unendliches gekoppeltes Differentialgleichungssystem!
- Trick: **erzeugende Funktion**

$$g(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\tau)$$

- multipliziere **Mastergleichung** mit x^n und summiere über n :

$$\partial_\tau g = \frac{L}{V} (1-x)(x \partial_x^2 g + \partial_x g - \epsilon g) \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{G}{L} \langle N_A \rangle_{\text{th}} \langle N_B \rangle_{\text{th}}$$

- **Gleichgewichtslösung** $\partial_\tau g = 0$

$$x \partial_x^2 g_{\text{eq}} + \partial_x g_{\text{eq}} - \epsilon g_{\text{eq}} = 0$$

- definiere

$$g_{\text{eq}}(x) = G[y(x)], \quad y(x) = 2\sqrt{\epsilon x}$$

$$y G''(y) + G'(y) - y G(y) = 0$$

- Lösung endlich für $y = 0$: **modifizierte Besselfunktion** $CI_0(y)$
- mit $g_{\text{eq}}(1) = 1$

$$g_{\text{eq}}(x) = \frac{I_0(2\sqrt{\epsilon x})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})}.$$

- [CH10]

$$I_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cos(k\varphi) \exp(x \cos \varphi) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

$$I_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \Gamma(j + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j + \alpha}.$$

- Für $\alpha = 0$

$$I_0(2\sqrt{\epsilon x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{(j!)^2} x^j$$

- mittlere Anzahl der $s\bar{s}$ -Paare

$$\langle N_s \rangle_{\text{th}}^{(\text{kan})} = g'_{\text{eq}}(x)|_{x=1} = \sqrt{\epsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\epsilon})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})}$$

- zur Interpretation: großkanonischer Limes

- falls $\langle N_s \rangle_{\text{th}} \gg 1 \Rightarrow$ kann bei Herleitung der **Mastergleichung** $N_s = \langle N_s \rangle_{\text{th}} = \langle N_s \rangle_{\text{th}}$ setzen
- ersetze in Mastergleichung $n^2 \rightarrow \langle N_s \rangle_{\text{th}} n$ und $(n+1)^2 \rightarrow \langle N_s \rangle_{\text{th}} (n+1)$
- **Mastergleichung im großkanonischen Limes**

$$\frac{d}{d\tau} P_n = \frac{L}{V} [\langle N_s \rangle_{\text{th}} (n+1) P_{n+1} - (\langle N_s \rangle_{\text{th}} n + \epsilon) P_n + \epsilon P_{n-1}]$$

- multipliziere mit n und summiere über n und verwende $\langle n \rangle = \langle N_s \rangle_{\text{th}} = \langle N_s \rangle_{\text{th}}$

$$d_\tau \langle n \rangle = \frac{L}{V} (\epsilon - \langle n \rangle \langle N_s \rangle_{\text{th}}) \Rightarrow \langle n \rangle_{\text{eq}} = \langle N_s \rangle_{\text{th}} = \sqrt{\epsilon} \Rightarrow d_\tau \langle n \rangle = \frac{L}{V} \sqrt{\epsilon} (\sqrt{\epsilon} - \langle n \rangle)$$

- **Mastergleichung** mit $\langle N_s \rangle_{\text{th}} = \sqrt{\epsilon}$

$$\frac{d}{d\tau} P_n = \frac{L}{V} [\epsilon (P_{n-1} - P_n) + (n+1) \sqrt{\epsilon} P_{n+1} - n \sqrt{\epsilon} P_n]$$

- gleiche Technik mit erzeugender Funktion wie bei kanonischer Rechnung:

$$\partial_\tau g = \frac{L}{V} \sqrt{\epsilon} (1-x)(\partial_x g - \sqrt{\epsilon} g)$$

- im Gleichgewicht $\partial_\tau g_{\text{eq}} = 0$:

$$g_{\text{eq}}(x) = \exp(-\sqrt{\epsilon}) \exp(x \sqrt{\epsilon})$$

$\Rightarrow$ Poisson-Verteilung

$$P_n^{(\text{eq})} = \frac{1}{n!} \partial_x^n g_{\text{eq}}(x) \Big|_{x=0} = \frac{\sqrt{\epsilon}^n}{n!} \exp(-\sqrt{\epsilon}).$$

4 References

Bibliography

Literatur

- [ABMRS26] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, K. Redlich, J. Stachel, Statistical hadronization: successes and some open issues, in *66th Cracow School of Theoretical Physics: Physics of Strong Interactions under Extreme Conditions* (2026).
URL <https://arxiv.org/abs/2604.07564>
- [BMRS03] P. Braun-Munzinger, K. Redlich, J. Stachel, Particle production in heavy ion collisions (2003).
URL <https://arxiv.org/abs/nuc1-th/0304013>
- [CH10] W. Cassing, H. v. Hees, *Mathematische Methoden für Physiker*, Universität Gießen (2010).
URL <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/maphy.pdf>
- [KKL⁺01] C. M. Ko, et al., Kinetic equation with exact charge conservation, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5438 (2001).
URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5438>