

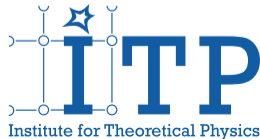
Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik 2

Vorlesung 2: Transporttheorie

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

22. April 2026



Outline

Konventionen

Spezielle Relativitätstheorie

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

References

Natürliche Einheiten

- ▶ „bequeme“ Einheiten in der hochenergetischen Kern- und Elementarteilchenphysik
- ▶ setze formal fundamentale Naturkonstanten $\hbar = c = k_B = 1$.
- ▶ es verbleibt dann im Prinzip die Wahl einer Einheit; gewöhnlich verwendet man aber 2:
 - ▶ Energien, Impulse, Massen und Temperaturen werden in **GeV** (oder **MeV**)
 - ▶ Zeiten und Längen werden in **fm** angegeben
 - ▶ Umrechnungsfaktor: $\hbar c \simeq 0,197 \text{ GeV fm} = 197 \text{ MeV fm}$
 - ▶ Geschwindigkeiten, Drehimpulse und Wirkungen sind dimensionslos
 - ▶ zur Umrechnung in SI-Einheiten: Energie $1 \text{ GeV} \simeq 1,602 \cdot 10^{-10} \text{ J}$
 - ▶ Temperatur $1 \text{ MeV} \simeq 1,16 \cdot 10^{10} \text{ K}$
- ▶ für diese Größen ist Umrechnung in SI-Einheiten einfach \Rightarrow Dimensionsanalyse
 - ▶ Bsp. $m_p \simeq 938 \text{ MeV} \Rightarrow m_p^{(\text{SI})} = m_p/c^2 \simeq 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Natürliche Einheiten

► Einheiten in der E-Dynamik

- in der theoretischen HEP-Physik geht man von **Heaviside-Lorentz-Einheiten** aus
- Coulombpotential: $V = q_1 q_2 / (4\pi r) = q_1^{(\text{SI})} q_2^{(\text{SI})} / (4\pi \epsilon_0 r) \Rightarrow q^{(\text{SI})} = \sqrt{\epsilon_0} q$
- in natürlichen Einheiten: q dimensionslos
- numerischer Wert via Feinstrukturkonstante: $\alpha = e^2 / (4\pi) = e^{(\text{SI})2} / (4\pi \epsilon_0 \hbar c) \simeq 1/137$
- Lorentz-Kraft: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}/c \times \vec{B})$

Spezielle Relativitätstheorie

- ▶ Literatur: [TB17, Sch87, Hee24]
- ▶ Vierervektorkomponenten: $(x^\mu) = (c t, \vec{x})^T$
- ▶ Minkowski-Metrik: $(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$
- ▶ kovariante Vektorkomponenten $(x_\mu) = (t, -\vec{x})$.
- ▶ Viererimpuls: $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$ (Einstein-Summenkonvention!)
- ▶ Lorentz-Transformationen

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$$

Spezielle Relativitätstheorie

- ▶ Lorentz-Boost mit Geschwindigkeit \vec{v} , $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2}$:

$$t' = \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{x})$$

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{v} t)$$

$$\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$$

- ▶ $\vec{x}_{\parallel} = \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{x})/v^2$, $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$
- ▶ Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls:

$$u^{\mu} = \gamma d_t x^{\mu} = d_{\tau} x^{\mu} = \frac{1}{m} p^{\mu}, \quad d\tau = dt/\gamma = dt \sqrt{1 - \vec{v}^2},$$

$$\vec{v} = \frac{1}{u^0} \vec{u} = \frac{1}{p^0} \vec{p}, \quad p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad \vec{v} = \frac{\partial E_p}{\partial \vec{p}},$$

$$\gamma = u^0 = \frac{E}{m}, \quad \gamma \vec{v} = \frac{1}{m} \vec{p}.$$

Spezielle Relativitätstheorie

- ▶ Matrizenschreibweise (mit $\vec{v}/v = \vec{n}$)

$$\hat{\Lambda}(\vec{v}) = [\Lambda^\mu{}_\nu(\vec{v})] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{v}^T \\ -\gamma \vec{v} & \mathbb{1}_3 + (\gamma - 1) \vec{n} \otimes \vec{n} \end{pmatrix}$$

- ▶ Vierervolumenelement: Lorentz-Skalar

$$d^4 \underline{x} = dt d^3 \vec{x} = d^4 \underline{x}', \quad d^4 p = dE d^3 \vec{p} = d^4 p'$$

- ▶ invariantes Dreivolumenelement (für on-shell-Impulse)

$$\frac{d^3 \vec{p}}{E_p} = \frac{d^3 \vec{p}'}{E_{p'}} = 2 d^4 \underline{p} \Theta(p^0) \delta(\underline{p}^2 - m^2)$$

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ Literatur: [Kam68, TB17, CK02, Hee15]
- ▶ „Hierarchien“ von Beschreibungen von **Vielteilchensystemen**
 - ▶ hier: stark wechselwirkende Materie („Quark-Gluon-Plasema“, „Hadron-Resonanzgas“, „Kernmaterie“)
- ▶ (fundamentale) mikroskopische Ebene: **(relativistische) Vielteilchen-Quantenfeldtheorie**
 - ▶ i.a. außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts \Rightarrow **Schwinger-Keldysh-Realzeitformalismus** \Rightarrow Ende des Semesters
- ▶ „**Coarse graining**“ \Rightarrow (semi-)klassische **Transport-Gleichungen**
 - ▶ beschreibt **Einteilchenphasenraumverteilung** $f(t, \vec{x}, \vec{p})$
 - ▶ $d^3 \vec{x} d^3 \vec{p} f(t, \vec{x}, \vec{p})$: Anzahl von Teilchen in Phasenraumvolumenelement $d^3 \vec{x} d^3 \vec{p}$
 - ▶ basiert auf **Trennung von Skalen**
 - ▶ makroskopische raumzeitliche Änderungen „langsam“ im Vergleich zu mikroskopischen „Fluktuationen“ um Mittelwerte von Teilchen in **Phasenraumzellen**
 - ▶ „makroskopisch klein“ \Leftrightarrow „mikroskopisch groß“

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ **Quantenmechanik:** Anzahl von Zuständen in Phasenraumelement $d^6 \xi = d^3 \vec{x} d^3 \vec{p}$
- ▶ $d^3 x = L^3$: Würfel mit Kantenlänge L (L „makroskopisch klein, mikroskopisch groß“); periodische Randbedingungen für Wellenfunktionen: $\vec{p} = (2\pi\hbar/L)\vec{n}$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$
- ▶ \Rightarrow Anzahl der Impulszustände in Phasenraumelement

$$dG = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3 \vec{p} = \frac{1}{(2\pi)^3} d^6 \xi$$

- ▶ falls Teilchen **intrinsische Quantenzahlen besitzen**: Faktor g , z.B. $g_{\text{spin}} = 2s + 1$ oder für Quarks $g_{\text{farbe}} = 3, \dots$

$$dG = \frac{g}{(2\pi)^3} d^6 \xi$$

- ▶ will $f(t, \vec{x}, \vec{p})$ als **Lorentz-Skalar** definieren

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ für Phasenraumelement $d^6\xi$: definiere Teilchenzahl im Inertialsystem Σ^* , in dem diese Teilchen ruhen

$$dN = d^6\xi^* \frac{g}{(2\pi)^3} f^*(\underline{x}^*, \vec{p}^* = 0)$$

- ▶ Boost vom Laborsystem zu Σ^* mit $\vec{v} = \vec{p}/E_p$, $\gamma = E_p/m$
- ▶ Transformation des Volumenelements: verwende Invarianz von $d^4\underline{x}$ und Zeitdilatation $dt^* = dt/\gamma$

$$\begin{aligned} d^4x^* = d^4x &\Rightarrow dt^* d^3\vec{x}^* = \frac{dt}{\gamma} d^3\vec{x}^* = dt d^3\vec{x} \\ \Rightarrow d^3\vec{x}' &= \gamma d^3\vec{x} = \frac{E_p}{m} d^3x \end{aligned}$$

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ Impulsvolumenelement:

$$\frac{d^3 \vec{p}^*}{E_{p^*}} = \frac{d^3 \vec{p}^*}{m} = \frac{d^3 \vec{p}}{E_p} \Rightarrow d^3 \vec{p}^* = \frac{m}{E_p} d^3 \vec{p}$$
$$\Rightarrow d^6 \xi^* = d^3 \vec{x}^* d^3 \vec{p}^* = \frac{E_p}{m} d^3 \vec{x} \frac{m}{E_p} d^3 \vec{p} = d^3 \vec{x} d^3 \vec{p} = d^6 \xi$$

- ▶ damit ist $f(\underline{x}, \underline{p}) \equiv f(\underline{x}, \underline{p})|_{p^0=E_p}$ ein Skalarfeld:

$$f(\underline{x}, \underline{p}) = f^*(\underline{x}^*, \underline{p}^*)$$

- ▶ Beispiel: Gleichgewichtsverteilung (**Maxwell-Boltzmann-Jüttner**-Verteilung)
 - ▶ im **im Ruhssystem** der Fluidzelle, wo $\langle \vec{p} \rangle = 0$, am RZ-Punkt \underline{x} :

$$f^*(\underline{x}^*, \underline{p}) = \exp\left(-\frac{E_{p^*} - \mu}{T}\right)$$

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ thermodynamische Variablen **Temperatur** T und **chemisches Potential** μ definiert **im lokalen Ruhssystem des Fluids**
- ▶ $\Rightarrow T$ und μ sind **Lorentz-Skalare**
- ▶ \Rightarrow Temperatur definitionsgemäß gemessen mit Thermometer, das relativ zur Fluidzelle ruht
- ▶ in Inertialsystem, wo Fluid Geschwindigkeit \vec{v} bzw. Vierergeschwindigkeit $\underline{u} = \gamma(1, \vec{v})$ besitzt:

$$E_{p^*} = \underline{u} \cdot \underline{p},$$

denn im Ruhssystem der Fluidzelle ist $\underline{u}^* = (1, 0, 0, 0)$ und damit $p^{*0} = \underline{u}^* \cdot \underline{p}^* = \underline{u} \cdot \underline{p}$

$$f(\underline{x}, \underline{p}) = \exp\left(-\frac{\underline{u} \cdot \underline{p} - \mu}{T}\right).$$

- ▶ Vierer-Teilchenzahlstromdichte

$$J^\mu(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{p^\mu}{E_p} f(\underline{x}, \underline{p})$$

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ ist **Vierervektorfeld**
- ▶ konsistent mit definition von f als Phasenraumdichte

$$J^0(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} f(\underline{x}, \underline{p}),$$

$$\vec{J}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{p}}{E_p} f(\underline{x}, \underline{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \vec{v} f(\underline{x}, \underline{p}).$$

- ▶ wegen $|\vec{v}| = |\vec{p}/E_p| < 1$ ist $J_\mu J^\mu > 0$
- ▶ eine mögliche Definition des **Fluidgeschwindigkeitsfeldes (Eckart-Definition)**

$$\vec{v}_{\text{Eck}}(\underline{x}) = \frac{\vec{J}(\underline{x})}{J^0(\underline{x})}.$$

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ kovariante Beschreibung: **Vierergeschwindigkeitsfeld**

$$u_{\text{Eck}}^\mu = \gamma v_{\text{Eck}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v}_{\text{Eck}} \end{pmatrix} = \frac{J^\mu}{\sqrt{\underline{J} \cdot \underline{J}}} = \frac{J^\mu}{n}$$

- ▶ $n = \sqrt{\underline{J} \cdot \underline{J}} = \underline{u}_{\text{Eck}} \cdot \underline{J}$: **skalare Teilchenzahldichte** im lokalen Ruhssystem der Fluidzelle

$$J^\mu(\underline{x}) = n(\underline{x}) \underline{u}_{\text{Eck}}(\underline{x}) = n(\underline{x}) \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v}_{\text{Eck}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{v}_{\text{Eck}} \end{pmatrix}$$

- ▶ $\rho = \gamma n$: **Teilchenzahldichte** im Laborsystem, $\vec{j} = \rho \vec{v}_{\text{Eck}}$ **Teilchenzahlstromdichte**
- ▶ falls keine Teilchenzahl ändernden Prozesse \Rightarrow **Teilchenzahlerhaltung**

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_\mu J^\mu = 0$$

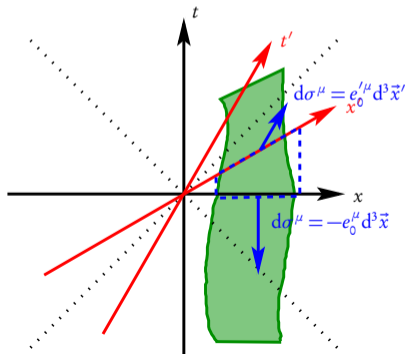
Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ dann (!!!) Gesamtteilchenzahl

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \rho$$

Lorentz-Skalar

- ▶ Beweis mit 4D Gaußschem Integralsatz



Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

$$0 = \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} \partial_\mu J^\mu = \int_{\partial V^{(4)}} d^3 \sigma_\mu J^\mu = \int_{t'=0} d^3 \vec{x}' J'^0(t=0, \vec{x}') - \int_{t=0} d^3 \vec{x} J^0(t=0, \vec{x}) = N' - N$$

► Energie-Impuls-Spannungstensor

$$T^{\mu\nu}(\underline{x}) = T^{\nu\mu}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p^\mu p^\nu}{E_p} f(\underline{x}, \underline{p}).$$

► $\mu = \nu = 0$:

$$T^{00}(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} E_p f(\underline{x}, \underline{p})$$

$\Rightarrow T^{00}$: **Energiedichte**

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ $\mu = k \in \{1, 2, 3\}, \nu = 0$

$$T^{k0} = T^{0k} := S^k = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \frac{\mathbf{g}}{(2\pi\hbar)^3} p^k f(\underline{x}, \underline{p})$$

$\Rightarrow T^{k0} = T^{0k}$: **Impulsdichte**

- ▶ (lokale) Energie-Impuls-Erhaltung

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_t T^{0\nu} + \partial_k T^{k\nu} = 0$$

- ▶ Integration über beliebiges ruhendes Dreivolumen und 3D Gauß-Integralsatz

$$\frac{dP_V^\nu}{dt} = - \int_{\partial V} d^2 F^k T^{k\nu} = - \int_{\partial V} d^2 F^k T^{\nu k}$$

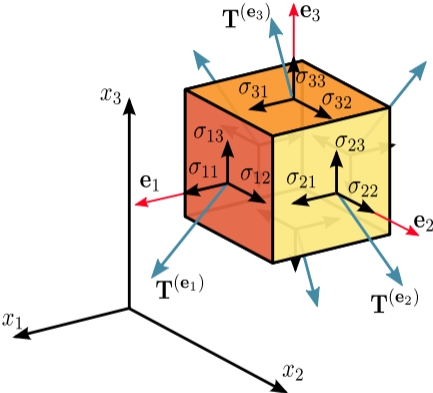
Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)

- ▶ $\nu = 0$: Energie im Volumen $E_V = P_V^0$ ändert sich durch Energiestrom durch Oberfläche (**Energiestromdichte** $T^{0k} = S^k =$ **Impulsdichte**)
- ▶ $\nu = k$

$$\frac{d\vec{p}_V}{dt} = \int_{\partial V} d^2\vec{F} \cdot \hat{\sigma}, \quad \sigma^{kj} = \sigma^{jk} = T_k^j = -T^{jk}$$

Spannungstensor

Phasenraumverteilung und Fluidmechanik (Kinematik)



Bibliography

- [CK02] C. Cercignani, G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Springer, Basel (2002).
URL <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8165-4>
- [Hee15] H. van Hees, Introduction to relativistic transport theory (2015).
URL <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/kolkata.pdf>
- [Hee24] H. v. Hees, Special Relativity (2024).
URL <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/pf-faq/srt.pdf>
- [Kam68] N. G. van Kampen, Relativistic thermodynamics of moving systems, *Phys. Rev.* **173**, 295 (1968).
URL <https://doi.org/10.1103/PhysRev.173.295>
- [Sch87] U. E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*, 2. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Thun (1987).

Bibliography

- [TB17] K. S. Thorne, R. D. Blandford, *Modern Classical Physics: Optics, Fluids, Plasmas, Elasticity, Relativity, and Statistical Physics*, Princeton University Press, Princeton, Oxfordshire (2017).