

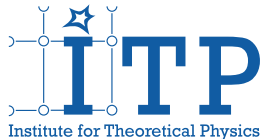
Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 13: Thermische Feldtheorie

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

5. Februar 2026



Outline

Erinnerung an die statistische Physik

Thermische Feldtheorie

Anhang: Gauß-Integration

Literatur

Statistische Physik

Literatur: [Cal85, Rei81, Rei65, KB61]

Erinnerung an die statistische Physik

- ▶ Quantenzustand bei **unvollständiger Kenntnis des Zustands**
- ▶ heuristisches Argument: Alice kann ein Quantensystem **vollständig präparieren** in **reine Zustände** $|\psi_j\rangle$
- ▶ sie schickt Bob zufällig die Zustände $|\psi_j\rangle$ mit **Wahrscheinlichkeiten** p_j
- ▶ **Erwartungswerte für Observable A**

$$\langle A \rangle_{\text{Bob}} = \sum_j p_j \langle \psi_j | \mathbf{A} | \psi_j \rangle$$

- ▶ sei $|b_k\rangle$ **Vollständiges Orthonormalsystem** $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\text{Bob}} &= \sum_{k_1, k_2} \sum_j p_j \langle \psi_j | b_{k_1} \rangle \langle b_{k_1} | \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle \langle b_{k_2} | \psi_j \rangle \\ &= \sum_{k_1, k_2} \left(\sum_j p_j \langle b_{k_2} | \psi_j \rangle \langle \psi_j | b_{k_1} \rangle \right) \langle b_{k_1} | \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle. \end{aligned}$$

Erinnerung an die statistische Physik

- ▶ definiere **selbstadjungierten statistischen Operator**

$$\mathbf{R} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_{\text{Bob}} &= \sum_{k_1 k_2} \langle b_{k_2} | \mathbf{R} | b_{k_1} \rangle \langle b_{k_1} | \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle = \sum_{k_2} \langle b_{k_2} | \mathbf{R} \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{A}) \\ &= \sum_{k_1 k_2} \langle b_{k_1} | \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle \langle b_{k_2} | \mathbf{R} | b_{k_1} \rangle = \sum_{k_1} \langle b_{k_1} | \mathbf{A} \mathbf{R} | b_{k_1} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{R})\end{aligned}$$

- ▶ **Tr: Spur (trace) eines Operators**
 - ▶ unabhängig von beliebig ausgewähltem VONS $|b_k\rangle$
 - ▶ Normierung:

$$\text{Tr } \mathbf{R} = \sum_{k,j} p_j \langle b_k | \psi_j \rangle \langle \psi_j | b_k \rangle = \sum_j p_j \sum_k \langle \psi_j | b_k \rangle \langle b_k | \psi_j \rangle = \sum_j p_j \langle \psi_j | \psi_j \rangle = \sum_j p_j = 1$$

- ▶ **definiert allgemeine Quantenzustände**

Erinnerung an die statistische Physik

► Entropie

- Informationstheorie **Maß für fehlende Information** [Kat67, Hob87]:

$$S = -\text{Tr}(\mathbf{R} \ln \mathbf{R}), \quad k_B = 1.$$

- **Prinzip der maximalen Entropie:**

„vorurteilsfreieste“ Abschätzung bei gegebener Information

- **Zeitentwicklung** (von Neumann-Gleichung)

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{i} [\mathbf{R}, \mathbf{H}] + \partial_t^{(\text{expl})} \mathbf{R} = 0$$

- **stationäre Zustände**

$$\partial_t^{(\text{expl})} \mathbf{R} = 0 \Rightarrow [\mathbf{R}, \mathbf{H}] = 0$$

$\Rightarrow \mathbf{R}$ ist Funktion der (unabhängigen) **Erhaltungsgrößen**

Erinnerung an die statistische Physik

► Gleichgewichtszustände

- **großkanonisches Ensemble**: Teilsystem, das mit seiner Umgebung Energie und Teilchen frei austauschen kann
- z.B. sehr großes Volumen mit Gas (abgeschlossenes System) $\Rightarrow$ betrachte Gas in einem immer noch großen Teilvolumen
- gegebene Information: **Energie und erhaltene Ladung** des Teilsystems
- können aber fluktuieren, d.h. suche **$\mathbf{R}$ maximaler Entropie** bei vorgegebenen Erwartungswerten

$$\langle H \rangle = \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{H}) = U, \quad \langle Q \rangle = \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{Q}) = q$$

- Thermodynamik: **U innere Energie, q Ladung** (z.B. Baryonenzahl) (ersetzt Teilchenzahl N in nichtrelativistischer Statistik)
- außerdem: Normierung $\text{Tr} \mathbf{R} = 1$

Erinnerung an die statistische Physik

► Zustand maximaler Entropie

- Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen: **Lagrange-Multiplikatoren** β , α und $(\Omega - 1)$:

$$\delta[S - \beta U - \alpha q - (\Omega - 1)\langle 1 \rangle] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr} \delta[-\mathbf{R}(\ln \mathbf{R} + \beta \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q} + (\Omega - 1)\mathbb{1})] = \operatorname{Tr}[-\delta \mathbf{R}(\ln \mathbf{R} + \beta \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q} + \Omega \mathbb{1})] \stackrel{!}{=} 0.$$

- muss für beliebige $\delta \mathbf{R}$ gelten $\Rightarrow$

$$\mathbf{R} = \exp(-\Omega - \beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q}).$$

- Normierung:

$$\operatorname{Tr} \mathbf{R} = 1 \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q}), \quad \Omega = \ln Z$$

- i.a. Energieeigenwerte $E \in [E_0, \infty) \Rightarrow \beta > 0$, damit Spur existiert
- $Z = Z(\beta, \alpha) = \exp[\Omega(\beta, \alpha)]$: **großkanonische Zustandssumme**

Erinnerung an die statistische Physik

- ▶ β und α : bestimmt über

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}[\mathbf{H} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q})] = -\frac{1}{Z} \partial_{\beta} Z = -\partial_{\beta} \Omega \stackrel{!}{=} U,$$

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}[\mathbf{Q} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q})] = -\frac{1}{Z} \partial_{\alpha} Z = -\partial_{\alpha} \Omega \stackrel{!}{=} q.$$

- ▶ Entropie

$$S = -\text{Tr}(\mathbf{R} \ln \mathbf{R}) = \Omega + \beta U + \alpha q, \quad U = -\partial_{\beta} \Omega, \quad q = -\partial_{\alpha} \Omega$$

- ▶ $\Omega = S - \beta U - \alpha q$: Legendre-Trafo der Entropie (Massieu-Funktion)
- ▶ weitere Variable: Volumen V : steckt in $\mathbf{H}$
(z.B. für freie Teilchen mit V als Würfel der Kantenlänge L mit periodischen Randbedingungen $\vec{p} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3$)
- ▶ $\Omega = \Omega(\beta, V, \alpha)$
- ▶ Beziehung zur Thermodynamik

$$\begin{aligned} dS &= (\cancel{d\beta} \partial_{\beta} \Omega + \cancel{d\alpha} \partial_{\alpha} \Omega + dV \partial_V \Omega) + \beta dU + \cancel{U d\beta} + \cancel{d\alpha q} + q d\alpha \\ &= \beta dU + \partial_V \Omega dV + \alpha dq. \end{aligned}$$

Erinnerung an die statistische Physik

► Thermodynamik: 1. Hauptsatz

$$dU = TdS - PdV + \mu dq = \frac{1}{\beta}(dS - \partial_V \Omega dV - \alpha q)$$

mit T : Temperatur, P : Druck, μ : chemisches Potential $\Rightarrow$

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad P = \frac{1}{\beta} \partial_V \Omega, \quad \alpha = -\frac{\mu}{T}$$

► P : Druck

Erinnerung an die statistische Physik

► Großkanonisches Potential/Landau-Potential

$$\Phi(T, V, \mu) = -T \Omega(1/T, V, -\mu/T) = U - TS - \mu N$$

⇒ Legendre-Transformierte von U :

$$d\Phi = -SdT - PdV - qd\mu \Rightarrow S = -\partial_T \Phi(T, V, \mu), \quad P = -\partial_V \Phi, \quad q = -\partial_\mu \Phi$$

► Thermische Quantenfeldtheorie: beschreibt Materie bei endlichen T und μ

Thermische Feldtheorie

Literatur: [KG06, LeB96, LV16, Lv87, CSHY85]

Thermische Feldtheorie

- ▶ betrachte wieder einfaches Modell mit **geladenem Skalarfeld** $\phi \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(|\phi|)$$

- ▶ invariant unter **globaler Phasentransformation**

$$\phi'(\underline{x}) = \exp(-i\chi)\phi(\underline{x}), \quad \phi^*(\underline{x}) = \exp(+i\chi)\phi^*(\underline{x}), \quad \chi = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

- ▶ $\Rightarrow$ erhaltene **Noether-Ladung**

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \phi^*(\underline{x}) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\underline{x}) = \text{const.}$$

- ▶ Quantisierung als **Bosonen**, kanonische Feldimpulse $\Pi = \dot{\phi}^*$, $\Pi^* = \dot{\phi}$

Thermische Feldtheorie

- $\Rightarrow$ kanonische gleichzeitige Kommutatoren:

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0,$$

$$[\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = [\Pi^\dagger(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0,$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] = 0,$$

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

- Pfadintegralzugang: Ziel Berechnung der Zustandssumme

$$Z = \text{Tr} \exp[-\beta(\mathbf{H} - \mu \mathbf{Q})]$$

- Feldeigenvektoren

$$\phi(x) |\phi, \phi^*, t\rangle = \phi(x) |\phi, \phi^*, t\rangle, \quad \phi^\dagger(x) |\phi, \phi^*, t\rangle = \phi^*(x) |\phi, \phi^*, t\rangle.$$

Thermische Feldtheorie

- ▶ **Zeitentwicklung**

$$\phi(t, \vec{x}) = \exp(i\mathbf{H}t)\phi(0, \vec{x})\exp(-i\mathbf{H}t)$$

$\Rightarrow$

$$|\phi, \phi^*, t\rangle = \exp(i\mathbf{H}t)|\phi, \phi^*, 0\rangle.$$

- ▶ Ladungsoperator (in Weyl-Ordnung: kanonische Feldimpulsoperatoren links von Feldoperatoren)

$$\mathbf{Q} = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} (\Pi^\dagger \phi^\dagger - \Pi \phi).$$

- ▶ Kommutatoren (folgt auch daraus, dass $\mathbf{Q}$ Phasentrafos erzeugt)

$$[\mathbf{Q}, \phi(x)] = -\phi(x), \quad [\mathbf{Q}, \phi^\dagger(x)] = \phi^\dagger(x)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\mu\mathbf{Q})\phi(x)\exp(+\beta\mu\mathbf{Q}) &= \exp(-\beta\mu)\phi(x), \\ \exp(-\beta\mu\mathbf{Q})\phi^\dagger(x)\exp(+\beta\mu\mathbf{Q}) &= \exp(+\beta\mu)\phi^\dagger(x), \end{aligned}$$

Thermische Feldtheorie

$\Rightarrow$

$$\exp(\beta\mu\mathbf{Q})|\phi, \phi^*\rangle = |\exp(-\beta\mu)\phi, \exp(+\beta\mu)\phi^*\rangle.$$

- ▶ Zustandssumme: berechne Spur mit **Feldoperatoreigenzuständen** (mit $t = 0$)

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta\mathbf{H} + \beta\mu\mathbf{Q}) = \mathcal{N} \int \text{D}\phi \text{D}\phi^* \langle \phi, \phi^*, 0 | \exp(-\beta\mathbf{H} + \beta\mu\mathbf{Q}) | \phi, \phi^*, 0 \rangle.$$

- ▶ $\mathcal{N}$: von T und μ unabhängiger (indefiniter) Faktor $\Rightarrow$ (physikalische irrelevant, s.u.)
- ▶ da $[\mathbf{Q}, \mathbf{H}] = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{N} \int \text{D}\phi_0 \text{D}\phi_0^* \langle \phi_0, \phi_0^*, 0 | \exp(\beta\mu\mathbf{Q}) \exp(-\beta\mathbf{H}) | \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle \\ &= \mathcal{N} \int \text{D}\phi_0 \text{D}\phi_0^* \langle \exp(-\beta\mu)\phi_0, \exp(+\beta\mu)\phi_0^*, 0 | \exp(-\beta\mathbf{H}) | \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle \end{aligned}$$

Thermische Feldtheorie

- Uminterpretation von β als „Imaginäre Zeit“:

$$\langle \exp(-\beta\mu)\phi_0, \exp(+\beta\mu)\phi_0^*, 0 | \underbrace{\exp(-\beta\mathbf{H})}_{-i(-i\beta)\mathbf{H}} \rangle = \langle \exp(\beta\mu)\phi_0, \exp(-\beta\mu)\phi_0^*, t = -i\beta |$$

⇒

$$Z = \mathcal{N} \int D\phi_0 D\phi_0^* \langle \exp(-\beta\mu)\phi_0, \exp(+\beta\mu)\phi_0^*, t_f = -i\beta | \phi_0, \phi_0^*, t_i = 0 \rangle$$

- unter Funktionalintegral: **Übergangsmatrixelement für imaginäre Zeit**
- ⇒ **euklidisches Pfadintegral**
- substituiere $t = -i\tau$, $\tau \in [0, \beta]$ in Lagrangian
- **Lagrangian für euklidische Feldtheorie**

$$\mathcal{L}_E = -\mathcal{L}_{t=-i\tau} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi + V(|\phi|).$$

- mit euklidischen Vierervektoren $(\tau, \vec{x})$ und $x_\mu x_\mu = \tau^2 + \vec{x}^2$

Thermische Feldtheorie

- ▶ $d^4x = -i d\tau d^3\vec{x} = -i d^4_E x \Rightarrow$ **Euklidische Wirkung:**

$$i \int d^4\mathcal{L} \Rightarrow i \int d^4_E x (-i)(-\mathcal{L}_E) = - \int d^4_E x \mathcal{L}_E = -S_E[\phi, \phi^*].$$

- ▶ „Übergangsmatrixelement“ als Pfadintegral

$$\langle \exp(-\beta\mu)\phi_0, \exp(+\beta\mu)\phi_0^*, -i\beta \mid \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle = \mathcal{N} \int_{\text{KMS}} D\phi D\phi^* \exp[-S_E(\phi, \phi^*)]$$

- ▶ KMS: **Kubo-Martin-Schwinger-Randbedingungen** [Kub57, MS59]

$$\begin{aligned} \phi(\tau = \beta, \vec{x}) &= \exp(-\beta\mu)\phi_0(\vec{x}), & \phi^*(\tau = \beta, \vec{x}) &= \exp(+\beta\mu)\phi_0^*(\vec{x}), \\ \phi(\tau = 0, \vec{x}) &= \phi_0(\vec{x}), & \phi^*(\tau = 0, \vec{x}) &= \phi_0^*(\vec{x}). \end{aligned}$$

- ▶ **Pfadintegral für Zustandsumme**

$$Z = \mathcal{N} \int D\phi_0 D\phi_0^* \int_{\text{KMS}} D\phi D\phi^* \exp[-S_E(\phi, \phi^*)]$$

Thermische Feldtheorie

- ▶ Freie Felder: relativistisches ideales geladenes Bosegas
 - ▶ kann berechnet werden, da dann Gaußsches Funktionalintegral

$$\mathcal{L}_E = (\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi$$

- ▶ Euklidische Wirkung

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}_E = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi^* (-\square_E + m^2) \phi$$

- ▶ NB: partielle Integration im Wirkungsintegral auch für τ -Integral ohne Randterme wegen der quasiperiodischen KMS-Bedingungen!
- Exkurs zu Gauß-Integralen (s. Anhang 4) $\Rightarrow$ (alle evtl. auftretenden indefiniten Faktoren werden in $\mathcal{N}$ zusammengefasst):

Thermische Feldtheorie

- ▶ damit gilt formal

$$Z = \left[\det \left(\frac{-\square_E + m^2}{M^2} \right) \right]^{-1} = \exp \left[-\text{Tr} \ln \left(\frac{-\square_E + m^2}{M^2} \right) \right]$$

M : Energieskala, die Argument der Determinante dimensionslos macht; $\hat{=}$ indefiniter Konstante $\mathcal{N}$

- ▶ zur Berechnung der Spur: **löse Eigenwertproblem des Operators $-\square_E + m^2$**
- ▶ Eigenfunktionen müssen KMS-Bedingung erfüllen

$$(-\square_E + m^2)\varphi = \lambda\varphi, (-\square_E + m^2)\varphi^* = \lambda\varphi$$

- ▶ Fourier-Entwicklung
- ▶ bzgl. $\vec{x}$ zur Regularisierung „Box-Quantisierung“: Würfel der Kantenlänge L mit periodischen RbN für Felder $\Rightarrow \vec{p} \in (2\pi/L)\mathbb{Z}^3$
- ▶ bzgl. τ : **bosonische Matsubara-Frequenzen** $\omega \in (2\pi/\beta)\mathbb{Z}$ [Mat55]
- ▶ am Schluss der Rechnung wieder $L \rightarrow \infty$

Thermische Feldtheorie

- ▶ dann

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}$$

- ▶ dabei geht räumliche „Nullmode mit $\vec{p} = 0$ i.a. verloren, d.h. sie muss in Fourierdarstellung extra hingeschrieben werden:

$$\phi(x) = \underbrace{\xi \exp(-\mu\tau)}_{\varphi_0(\tau)} + \sqrt{\beta V} \sum_{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[(i\omega - \mu)\tau + i\vec{p} \cdot \vec{x}] \tilde{\phi}(\omega, \vec{p}),$$

$$\phi^*(x) = \underbrace{\xi^*(\omega) \exp(+\mu\tau)}_{\varphi_0^*(\tau)} + \sqrt{\beta V} \sum_{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[(-i\omega + \mu)\tau - i\vec{p} \cdot \vec{x}] \tilde{\phi}^*(\omega, \vec{p}),$$

- ▶ Normierungsfaktor so, dass $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^*$ dimensionslos sind
- ▶ Eigenwert der Nullmoden: $\lambda_0 = m^2 - \mu^2$

Thermische Feldtheorie

- übrige Eigenwerte:

$$\lambda(p) = -(\mathrm{i}\omega - \mu)^2 + E_p^2, \quad E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

- damit *alle* Eigenwerte $\operatorname{Re} \lambda > 0$ erfüllen, auch Nullmode $\Rightarrow \mu^2 < m^2 \Rightarrow -m < \mu < m$
- Euklidische Wirkung:

$$S_E = \beta V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi + \sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \beta^2 [-(\mathrm{i}\omega - \mu)^2 + E_p^2] \tilde{\phi}^*(\omega, \vec{p}) \phi(\omega, \vec{p})$$

- im Pfadintegral $\phi \rightarrow \varphi_0 + \phi'$, $D\phi = D\phi'$, $\phi^* \rightarrow \varphi_0 + \phi'^*$, $D\phi^* = D\phi'^* \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Omega = \ln Z &= \underbrace{-\beta V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi}_{\Omega_0} + \underbrace{\ln(\mathcal{N} / \det[\beta^2(-\square_E + m^2)])}_{\Omega'} \\ &= -\beta V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi - \operatorname{Tr} \ln \det[\beta^2(-\square_E + m^2)] - \ln \mathcal{N} \\ &= -\beta V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi - \sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{p} \ln \left\{ \beta^2 [-(\mathrm{i}\omega - \mu)^2 + E_p^2] + \ln \mathcal{N} \right\} \end{aligned}$$

Thermische Feldtheorie

- ▶ Matsubara-Summe ist divergent
- ▶ kann Summe über ω konvergent machen, indem man stattdessen

$$\partial_{m^2}\Omega' = -\sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{-(i\omega - \mu)^2 + E_p^2}$$

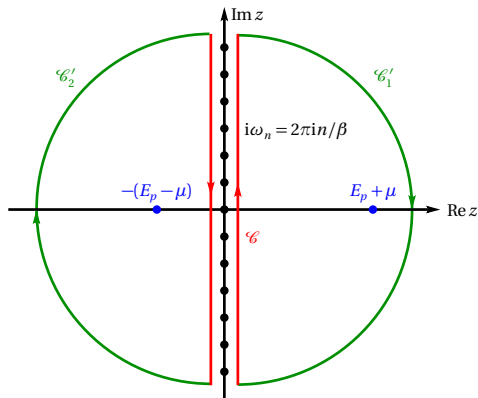
berechnet

- ▶ **Berechnen von Matsubara-Summen**
 - ▶ Idee: Nutze Residuensatz der Funktionentheorie
 - ▶ **Bose-Einstein-Verteilungsfunktion**

$$f_B(z) = \frac{1}{\exp(\beta z) - 1}$$

$\beta f_B(z)$ hat einfache Pole bei Matsubarafrequenzen $z = i\omega_n = 2\pi i n / \beta$, $n \in \mathbb{Z}$ mit Residuum 1

Thermische Feldtheorie



- **Residuensatz** für rote Kontur $\mathcal{C}$

$$\sum_{\omega} f(i\omega) = \frac{\beta}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} dz f(z) f_B(z).$$

Thermische Feldtheorie

- ▶ Reihe konvergent, wenn $f(z)$ im Unendlichen schneller als $1/z$ abfällt
⇒: kann grüne Halbkreise hinzufügen ⇒ tragen im Limes Radius $\rightarrow \infty$ nichts bei!
- ▶ für obige Summe für $\partial_{m^2}\Omega$:

$$f(z) = \frac{1}{(z - \mu)^2 - E_p^2} = \frac{1}{[z - (\mu + E_p)][z - (\mu - E_p)]}$$

- ▶ die beiden rot-grünen Konturen umschließen jeweils die einfachen Pole bei $z = E_p + \mu$ und $z = -E_p + \mu$
- ▶ Konturen im Uhrzeigersinn: Faktor $-2\pi i$ ⇒

$$\begin{aligned}\partial_{m^2}\Omega' &= -V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} \left\{ -f_B[-(E_p - \mu)] + f_B(E_p + \mu) \right\} \\ &= -V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} \left[1 + f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu) \right]\end{aligned}$$

Thermische Feldtheorie

- ▶ Summen über β mit Faktoren f_B konvergent

$$\partial_{m^2}\Omega' = -\beta V \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}}_{\text{divergent!}} - V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} [f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu)],$$

- ▶ nun ist

$$\partial_{m^2}\Omega' = \frac{1}{2m} \partial_m \Omega' = \frac{1}{2E_p} \partial_{E_p} \Omega'.$$

- ▶ integriere bzgl. E_p :

$$\Omega' = -\beta V \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p}_{\text{divergent!}} - V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \ln[1 - \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 - \exp(-\beta(E_p + \mu))] \}$$

Thermische Feldtheorie

- ▶ innere Energie

$$U = -(\partial_\beta \Omega')_{\alpha=-\beta\mu=\text{const}} = \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} E_p}_{\text{divergent!}} + V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} E_p [f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu)]$$

- ▶ $\Rightarrow$ divergentes Integral $\Rightarrow$ Nullpunktsenergien der $\vec{p}$ -Feldmoden $E_p/2$ für Teilchen und nochmal $E_p/2$ für die Antiteilchen
- ▶ taucht auf, weil wir Hamiltonian nicht wie im Operatorformalismus **normalgeordnet sondern Weyl-geordnet** haben!
- ▶ muss abgezogen werden $\Rightarrow$ „**Renormierung**“
- ▶ endliches großkanonisches Potential

$$\begin{aligned} \Phi(T, V, \mu, \xi, \xi^*) &= -T \Omega_{\text{ren}} = V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi \\ &\quad + T V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \ln[1 - \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 - \exp(-\beta(E_p + \mu))] \} \end{aligned}$$

Thermische Feldtheorie

- ▶ Bestimmung der Parameter ξ und ξ^* bzw. $\xi^*\xi$: Φ muss **minimiert werden** bzgl. solcher indeterminierter Parameter (Thermodynamik! s. [Cal85])
- ▶ für $|\mu| < m$: $|\xi|^2 = 0$
- ▶ für $\mu = m$: $|\xi|^2$ indeterminiert
- ▶ **Gesamtladung (Nettoteilchenzahl):**

$$q = -\partial_\mu \Phi = \underbrace{2V\mu\xi^*\xi}_{q_{\text{cond}}} + \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} [f_B(E_p - \mu) - f_B(E_p + \mu)]}_{q_{\text{ang}}}$$

- ▶ für $\mu > 0$ ist $q > 0 \Rightarrow$ mehr Teilchen als Antiteilchen
- ▶ für $\mu < 0$ ist $q < 0 \Rightarrow$ mehr Antiteilchen als Antiteilchen
- ▶ für kleine $T < T_{\text{krit}}$ bzw. große β liefert maximalstmöglicher Wert $\mu = m$ nur $0 < q_{\text{ang}} < q \Rightarrow$ muss $|\xi|^2$ so wählen, dass q_{cond} fehlende Teilchenzahl ergibt
- ▶ T_{krit} wird bestimmt durch Bedingung $q_{\text{ang}} = q$
- ▶ entsprechend für Antiteilchenüberschuss: für $T < T_{\text{krit}}$ liefert $\mu = -m$ nur $0 > q_{\text{ang}} > q \Rightarrow |\xi|^2$ so wählen, dass $q_{\text{kond}} < 0$ fehlende Antiteilchenzahl liefert

Thermische Feldtheorie

- ▶ Term kommt von Nullmode (s.o.): für $T < T_{\text{krit}}$ ist **makroskopischer Anteil** der Gasteilchen (bzw. Gasanteilchen) im **Einteilchengrundzustand** bei $\vec{p} = 0$
- ▶ **Bose-Einstein-Kondensat** [Ein24, Ein25]
- ▶ $|\xi|^2$ ist **Ordnungsparameter** für Phasenübergang zwischen Zuständen mit und ohne Bose-Einstein-Kondensat
- ▶ **Für endliches L** : komme mit $|\xi|^2 = 0$ aus, da Beitrag der Summe von $\vec{p} = 0$ beliebig mit $\mu \rightarrow \pm m$ betragsmäßig beliebig groß gemacht werden kann

Fermionen

- ▶ analog wie bei Bosonen aber mit **Grassmann-Zahlenwertigen Feldern**
- ▶ quasiperiodische Randbedingungen bei Bosonen → **antiquasiperiodische Randbedingungen bei Dirac-Fermionen**

$$\psi(\tau = \beta, \vec{x}) = -\exp(-\beta\mu)\psi(\tau = 0, \vec{x}),$$

$$\bar{\psi}(\tau = \beta, \vec{x}) = -\exp(+\beta\mu)\bar{\psi}(\tau = 0, \vec{x}),$$

- ▶ **fermionische Matsubara-Frequenzen**

$$\omega \in \frac{(2\mathbb{Z} + 1)\pi}{\beta}$$

- ▶ Summen über fermionische Matsubarasummen: $-\beta f_F$ mit **Fermiverteilungsfunktion**

$$f_F(z) = \frac{1}{\exp(\beta z) + 1}$$

Thermische Feldtheorie

- ▶ keine Nullmoden $\Rightarrow$ Zustandssumme

$$\Omega = \ln Z = V g_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \ln[1 + \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 + \exp(-\beta(E_p + \mu))] \right\}.$$

- ▶ Spinentartungsfaktor: $g_s = 2s + 1 = 2$

Thermische Feldtheorie

► Wechselwirkende Theorie

- wieder einfachstes Beispiel: $\lambda\phi^4$ mit $\phi \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu = 0$ (keine erhaltene Ladungen)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

- für Zustandssumme, Ω , Φ : formal exakt gleiche **erzeugende Funktionale** wie im Vakuum
- aber: **Imaginärzeit** $t = -i\tau$, $\tau \in [0, \beta]$
- Vertex: $-\lambda/4!$
- Propagator

$$\Delta_M(p_E) = \frac{1}{-(i\omega)^2 + \vec{p}^2 + m^2}, \quad \omega \in (2\pi/\beta)\mathbb{Z}$$

- Korrekturen zu $\Omega = \ln Z$: alle geschlossenen zusammenhängenden Diagramme

Thermische Feldtheorie

► Wiederherstellung der chiralen Theorie

- betrachte einfachstes lineares σ -Modell (mit Pionen und σ -Mesonen)
- $\phi = (\sigma, \vec{\pi})^T \in \mathbb{R}^4$
- $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie realisiert durch $SO(4)$ (im **chiralen Limes**)

$$\mathcal{L}_{\chi\text{limit}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - f_\pi^2)^2$$

- kann mit isospin-chemischem Potential gerechnet werden (hier zur Einfachheit $\mu_I = 0$)
- berechne **effektives Quantenpotential** als

$$V(\xi, T) = -\Omega(\xi, T) = -\ln Z(\xi, T)$$

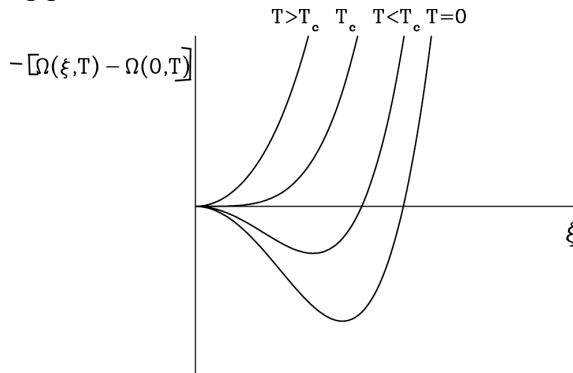
$$Z(\xi, T) = \mathcal{N} \int_{\text{KMS}} D\phi \exp[-S_E(\xi + \phi)]$$

- einige Beispieldiagramme

Thermische Feldtheorie

$$\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ + \quad + \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \bigcirc \\ \times \quad \times \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}$$

- ▶ divergente Teile müssen renormiert werden: geht mit reinen Vakuum-Gegentermen
- ▶ T - (und μ -)abhängiges Potential

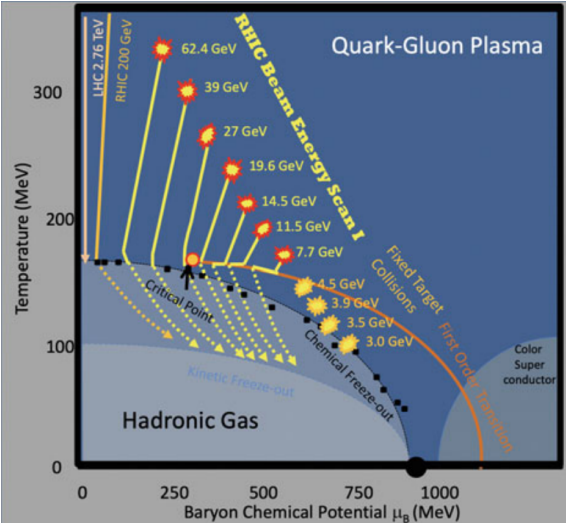


Thermische Feldtheorie

- ▶ Grundzustand im Minimum des Potentials
- ▶ ξ : Ordnungsparameter $\Rightarrow \xi > 0$ chiral gebrochene Phase
- ▶ masselose Pionen
- ▶ Nambu-Goldstone-Bosonen der spontan gebrochenen Symmetrie: $SO(4) \rightarrow SO(3)$
- ▶ σ -Meson massiv
- ▶ für $T > T_c$: $\xi = 0 \Rightarrow$ spontane Symmetriebrechung aufgehoben
- ▶ Pionen werden massiv und haben gleiche Masse wie σ

- ▶ **Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Materie**
 - ▶ aus QCD-Sicht interpretiert: **Schmelzen des Quark-Kondensats**
 - ▶ Gitter-QCD-Rechnung bei endlichen T ($\mu_B = 0$): Crossover-Übergang bei $T_{pc} \simeq 155 \text{ MeV}$
 - ▶ auch (pseudo-)kritische Temperatur des **Confinement-Deconfinement-Übergangs**
 - ▶ Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Materie
 - ▶ bei endlichem baryochemischem Potential: $\mu_B \neq 0 \Rightarrow$ Gitter-QCD schwierig („sign problem“)
 - ▶ Phasendiagramm nicht exakt bekannt $\Rightarrow$ **ultrarelativistische Schwerionenstöße**
 - ▶ Phasenübergang in Natur: **$\simeq 10 \text{ ms}$ nach Urknall**

Thermische Feldtheorie



aus [BRST22]

Gauß-Integration

- ▶ 1D Gaußintegral

$$I = \int_{\mathbb{R}} dx \exp(-Ax^2).$$

- ▶ Trick: berechne I^2

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \exp[-A(x^2 + y^2)], \quad \operatorname{Re} A > 0$$

- ▶ integriere in Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $d^2 y = dr d\varphi r$:

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi r \exp(-Ar^2) = \frac{\pi}{A} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

Gauß-Integration

- ▶ Gauß-Integral über komplexes Argument $z = x + iy$

$$dz dz^* := dx dy \det \frac{\partial(z, z^*)}{\partial(x, y)} = dx dy 2i$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{C}} dz dz^* \exp(-Az^* z) = 2i \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \int [-A(x^2 + y^2)] = 2i I^2 = \frac{2\pi i}{A}.$$

- ▶ Sei $\hat{A} \in \mathbb{C}^n$ selbstadjungiert mit **nur positiven Eigenwerten**
- ▶ dann existiert $\hat{U} \in \text{SU}(N)$ mit $\hat{A} = \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U}$, $\hat{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\mathbb{C}^n} dz_1 \cdots dz_n dz_1^* \cdots dz_n^* \exp(-z^\dagger \hat{A} z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} dz_1 \cdots dz_n dz_1^* \cdots dz_n^* \exp(-z^\dagger \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U} z) \end{aligned}$$

Gauß-Integration

- ▶ substituiere $z' = \hat{U} z$ wegen $\det \hat{U} = 1$

$$I_n = \int_{\mathbb{C}^n} dz'_1 \cdots dz'_n dz'^*_1 \cdots dz'^*_n \exp(-z'^{\dagger} \hat{D} \hat{z}') = \frac{(2\pi i)^n}{\prod_{j=1}^n \lambda_j} = \frac{(2\pi i)^n}{\det \hat{A}}$$

- ▶ nützliche Formel

$$\ln \det \hat{A} = \ln \prod_{j=1}^n \lambda_j = \text{tr} \ln \hat{A}$$

- ▶ Gauß-Integrale über **Grassmann-Zahlen** η_a and $\bar{\eta}_a$ ($a \in \{1, \dots, n\}$):

$$\int \prod_a d\bar{\eta}_a d\eta_a \exp(\bar{\eta}^T \hat{A} \eta) = \int \prod_a d\bar{\eta}_a d\eta_a (\cdots + \lambda_1 \cdots \lambda_n \bar{\eta}_1 \eta_1 \cdots \bar{\eta}_n \eta_n) = \prod_{a=1}^n \lambda_a = \det \hat{A}$$

- [BRST22] D. Blaschke, K. Redlich, C. Sasaki and L. Turko (eds.), *Understanding the Origin of Matter: Perspectives in Quantum Chromodynamics*, vol. 999, Springer Nature Switzerland, Cham (2022),
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-95491-8>.
- [Cal85] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, John Wiley&Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 2 edn. (1985).
- [CSHY85] K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, Equilibrium and Nonequilibrium Formalisms made unified, Phys. Rept. **118**, 1 (1985),
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(85\)90136-X](https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90136-X).

Literatur

- [Ein24] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, Königliche Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte **1924**, 261 (1924),
https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf.
- [Ein25] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases – Zweite Abhandlung, Königliche Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte **1925**, 3 (1925),
https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf.
- [Hob87] A. Hobson, *Concepts in Statistical Mechanics*, Gordon and Breach Science Publishers, 2 edn. (1987).
- [Kat67] A. Katz, *Principles of Statistical Mechanics*, W. H. Freeman and Company, San Francisco and London (1967).

Literatur

- [KB61] L. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, New York (1961).
- [KG06] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory; Principles and Applications*, Cambridge University Press, 2 edn. (2006).
- [Kub57] R. Kubo, Statistical mechanical theory of irreversible processes. 1. General theory and simple applications in magnetic and conduction problems, J. Phys. Soc. Jap. **12**, 570 (1957),
<https://jpsj.ipap.jp/link?JPSJ/12/570>.
- [LeB96] M. LeBellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne (1996).
- [Lv87] N. P. Landsmann and C. G. van Weert, Real- and Imaginary-time Field Theory at Finite Temperature and Density, Physics Reports **145**, 141 (1987),
[https://doi.org/10.1016/0370-1573\(87\)90121-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(87)90121-9).

Literatur

- [LV16] M. Laine and A. Vuorinen, *Basics of Thermal Field Theory*, vol. 925 of *Lecture Notes in Physics*, Springer (2016),
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-31933-9>.
- [Mat55] T. Matsubara, A new Approach to Quantum Statistical Mechanics, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955), <https://ptp.ipap.jp/link?PTP/14/351>.
- [MS59] P. C. Martin and J. S. Schwinger, Theory of Many-Particle Systems I, *Phys. Rev.* **115**, 1342 (1959),
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.1342>.
- [Rei65] F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw Hill Book Company, New York (1965).
- [Rei81] F. Reif, *Statistische Physik*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1981).