

Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 13: Thermische Feldtheorie

Hendrik van Hees

5. Februar 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Erinnerung an die statistische Physik	1
2	Thermische Feldtheorie	5
3	Anhang: Gauß-Integration	16
4	Literatur	17
1	Erinnerung an die statistische Physik	

Statistische Physik

Literatur: [\[Cal85, Rei81, Rei65, KB61\]](#)

Erinnerung an die statistische Physik

- Quantenzustand bei **unvollständiger Kenntnis des Zustands**
- heuristisches Argument: Alice kann ein Quantensystem **vollständig präparieren** in **reine Zustände** $|\psi_j\rangle$
- sie schickt Bob zufällig die Zustände $|\psi_j\rangle$ mit **Wahrscheinlichkeiten** p_j
- **Erwartungswerte für Observable A**

$$\langle A \rangle_{\text{Bob}} = \sum_j p_j \langle \psi_j | \mathbf{A} | \psi_j \rangle$$

- sei $|b_k\rangle$ **Vollständiges Orthonormalsystem** $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\text{Bob}} &= \sum_{k_1, k_2} \sum_j p_j \langle \psi_j | b_{k_1} \rangle \langle b_{k_1} | \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle \langle b_{k_2} | \psi_j \rangle \\ &= \sum_{k_1, k_2} \left(\sum_j p_j \langle b_{k_2} | \psi_j \rangle \langle \psi_j | b_{k_1} \rangle \right) \langle b_{k_1} | \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle. \end{aligned}$$

- definiere **selbstadjungierten statistischen Operator**

$$\mathbf{R} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\text{Bob}} &= \sum_{k_1 k_2} \langle b_{k_2} | \mathbf{R} | b_{k_1} \rangle \langle b_{k_1} | \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle = \sum_{k_2} \langle b_{k_2} | \mathbf{R} \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{A}) \\ &= \sum_{k_1 k_2} \langle b_{k_1} | \mathbf{A} | b_{k_2} \rangle \langle b_{k_2} | \mathbf{R} | b_{k_1} \rangle = \sum_{k_1} \langle b_{k_1} | \mathbf{A} \mathbf{R} | b_{k_1} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{R}) \end{aligned}$$

- Tr: **Spur (trace) eines Operators**

- unabhängig von beliebig ausgewähltem VONS $|b_k\rangle$
- Normierung:

$$\text{Tr } \mathbf{R} = \sum_{k, j} p_j \langle b_k | \psi_j \rangle \langle \psi_j | b_k \rangle = \sum_j p_j \sum_k \langle \psi_j | b_k \rangle \langle b_k | \psi_j \rangle = \sum_j p_j \langle \psi_j | \psi_j \rangle = \sum_j p_j = 1$$

- **definiert allgemeine Quantenzustände**

- Entropie

- Informationstheorie **Maß für fehlende Information** [Kat67, Hob87]:

$$S = -\text{Tr}(\mathbf{R} \ln \mathbf{R}), \quad k_B = 1.$$

- **Prinzip der maximalen Entropie**: „vorurteilsfreieste“ Abschätzung bei gegebener Information

- **Zeitentwicklung** (von Neumann-Gleichung)

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{i} [\mathbf{R}, \mathbf{H}] + \partial_t^{(\text{expl})} \mathbf{R} = 0$$

- **stationäre Zustände**

$$\partial_t^{(\text{expl})} \mathbf{R} = 0 \Rightarrow [\mathbf{R}, \mathbf{H}] = 0$$

$\Rightarrow \mathbf{R}$ ist Funktion der (unabhängigen) **Erhaltungsgrößen**

- **Gleichgewichtszustände**

- **großkanonisches Ensemble**: Teilsystem, das mit seiner Umgebung Energie und Teilchen frei austauschen kann
- z.B. sehr großes Volumen mit Gas (abgeschlossenes System) $\Rightarrow$ betrachte Gas in einem immer noch großen Teilvolumen
- gegebene Information: **Energie und erhaltene Ladung** des Teilsystems
- können aber fluktuieren, d.h. suche **$\mathbf{R}$ maximaler Entropie** bei vorgegebenen Erwartungswerten

$$\langle H \rangle = \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{H}) = U, \quad \langle Q \rangle = \text{Tr}(\mathbf{R} \mathbf{Q}) = q$$

- Thermodynamik: **U innere Energie, q Ladung** (z.B. Baryonenzahl) (ersetzt Teilchenzahl N in nichtrelativistischer Statistik)
- außerdem: Normierung $\text{Tr} \mathbf{R} = 1$

- **Zustand maximaler Entropie**

- Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen: **Lagrange-Multiplikatoren** β , α und $(\Omega - 1)$:

$$\delta[S - \beta U - \alpha q - (\Omega - 1)\langle 1 \rangle] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \text{Tr} \delta[-\mathbf{R}(\ln \mathbf{R} + \beta \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q} + (\Omega - 1)\mathbb{1})] = \text{Tr}[-\delta \mathbf{R}(\ln \mathbf{R} + \beta \mathbf{H} + \alpha \mathbf{Q} + \Omega \mathbb{1})] \stackrel{!}{=} 0.$$

- muss für beliebige $\delta \mathbf{R}$ gelten $\Rightarrow$

$$\mathbf{R} = \exp(-\Omega - \beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q}).$$

- Normierung:

$$\text{Tr} \mathbf{R} = 1 \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q}), \quad \Omega = \ln Z$$

- i.a. Energieeigenwerte $E \in [E_0, \infty) \Rightarrow \beta > 0$, damit Spur existiert
- $Z = Z(\beta, \alpha) = \exp[\Omega(\beta, \alpha)]$: **großkanonische Zustandssumme**
- β und α : bestimmt über

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}[\mathbf{H} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q})] = -\frac{1}{Z} \partial_\beta Z = -\partial_\beta \Omega \stackrel{!}{=} U,$$

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}[\mathbf{Q} \exp(-\beta \mathbf{H} - \alpha \mathbf{Q})] = -\frac{1}{Z} \partial_\alpha Z = -\partial_\alpha \Omega \stackrel{!}{=} q.$$

- **Entropie**

$$S = -\text{Tr}(\mathbf{R} \ln \mathbf{R}) = \Omega + \beta U + \alpha q, \quad U = -\partial_\beta \Omega, \quad q = -\partial_\alpha \Omega$$

- $\Omega = S - \beta U - \alpha q$: Legendre-Trafo der Entropie (**Massieu-Funktion**)
- weitere Variable: **Volumen** V : steckt in $\mathbf{H}$ (z.B. für freie Teilchen mit V als Würfel der Kantenlänge L mit periodischen Randbedingungen $\vec{p} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3$)
- $\Omega = \Omega(\beta, V, \alpha)$
- **Beziehung zur Thermodynamik**

$$\begin{aligned} dS &= (d\beta \partial_\beta \Omega + d\alpha \partial_\alpha \Omega + dV \partial_V \Omega) + \beta dU + U d\beta + d\alpha q + q d\alpha \\ &= \beta dU + \partial_V \Omega dV + \alpha dq. \end{aligned}$$

- **Thermodynamik: 1. Hauptsatz**

$$dU = T dS - P dV + \mu dq = \frac{1}{\beta} (dS - \partial_V \Omega dV - \alpha q)$$

mit T : Temperatur, P : Druck, μ : chemisches Potential $\Rightarrow$

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad P = \frac{1}{\beta} \partial_V \Omega, \quad \alpha = -\frac{\mu}{T}$$

- P : **Druck**

- **Großkanonisches Potential/Landau-Potential**

$$\Phi(T, V, \mu) = -T \Omega(1/T, V, -\mu/T) = U - TS - \mu N$$

$\Rightarrow$ Legendre-Transformierte von U :

$$d\Phi = -SdT - PdV - qd\mu \Rightarrow S = -\partial_T \Phi(T, V, \mu), \quad P = -\partial_V \Phi, \quad q = -\partial_\mu \Phi$$

- **Thermische Quantenfeldtheorie**: beschreibt Materie bei endlichen T und μ

2 Thermische Feldtheorie

Thermische Feldtheorie

Literatur: [KG06, LeB96, LV16, Lv87, CSHY85]

Thermische Feldtheorie

- betrachte wieder einfaches Modell mit **geladenem Skalarfeld** $\phi \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - V(|\phi|)$$

- invariant unter **globaler Phasentransformation**

$$\phi'(\underline{x}) = \exp(-i\chi)\phi(\underline{x}), \quad \phi^*(\underline{x}) = \exp(+i\chi)\phi^*(\underline{x}), \quad \chi = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

- $\Rightarrow$ erhaltene **Noether-Ladung**

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \phi^*(\underline{x}) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\underline{x}) = \text{const.}$$

- Quantisierung als **Bosonen**, kanonische Feldimpulse $\Pi = \dot{\phi}^*$, $\Pi^* = \dot{\phi}$
- $\Rightarrow$ **kanonische gleichzeitige Kommutatoren:**

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= [\phi^\dagger(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0, \\ [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= [\Pi^\dagger(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0, \\ [\phi(t, \vec{x}), \Pi^\dagger(t, \vec{y})] &= 0, \\ [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

- **Pfadintegralzugang:** Ziel Berechnung der **Zustandssumme**

$$Z = \text{Tr} \exp[-\beta(\mathbf{H} - \mu \mathbf{Q})]$$

- **Feldeigenvektoren**

$$\Phi(x) |\phi, \phi^*, t\rangle = \phi(x) |\phi, \phi^*, t\rangle, \quad \Phi^\dagger(x) |\phi, \phi^*, t\rangle = \phi^*(x) |\phi, \phi^*, t\rangle.$$

- **Zeitentwicklung**

$$\Phi(t, \vec{x}) = \exp(i\mathbf{H}t) \Phi(0, \vec{x}) \exp(-i\mathbf{H}t)$$

$\Rightarrow$

$$|\phi, \phi^*, t\rangle = \exp(i\mathbf{H}t) |\phi, \phi^*, 0\rangle.$$

- Ladungsoperator (in Weyl-Ordnung: kanonische Feldimpulsoperatoren links von Feldoperatoren)

$$\mathbf{Q} = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} (\Pi^\dagger \phi^\dagger - \Pi \phi).$$

- Kommutatoren (folgt auch daraus, dass $\mathbf{Q}$ Phasentrafos erzeugt)

$$[\mathbf{Q}, \phi(x)] = -\phi(x), \quad [\mathbf{Q}, \phi^\dagger(x)] = \phi^\dagger(x)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exp(-\beta\mu\mathbf{Q})\phi(x)\exp(+\beta\mu\mathbf{Q}) &= \exp(-\beta\mu)\phi(x), \\ \exp(-\beta\mu\mathbf{Q})\phi^\dagger(x)\exp(+\beta\mu\mathbf{Q}) &= \exp(+\beta\mu)\phi^\dagger(x), \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\exp(\beta\mu\mathbf{Q})|\phi, \phi^*\rangle = |\exp(-\beta\mu)\phi, \exp(+\beta\mu)\phi^*\rangle.$$

- Zustandssumme: berechne Spur mit **Feldoperatoreigenzuständen** (mit $t = 0$)

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta\mathbf{H} + \beta\mu\mathbf{Q}) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \langle \phi, \phi^*, 0 | \exp(-\beta\mathbf{H} + \beta\mu\mathbf{Q}) | \phi, \phi^*, 0 \rangle.$$

- $\mathcal{N}$: von T und μ unabhängiger (indefinit) Faktor $\Rightarrow$ (physikalische irrelevant, s.u.)
- da $[\mathbf{Q}, \mathbf{H}] = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_0 \mathcal{D}\phi_0^* \langle \phi_0, \phi_0^*, 0 | \exp(\beta\mu\mathbf{Q}) \exp(-\beta\mathbf{H}) | \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_0 \mathcal{D}\phi_0^* \langle \exp(-\beta\mu)\phi_0, \exp(+\beta\mu)\phi_0^*, 0 | \exp(-\beta\mathbf{H}) | \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle \end{aligned}$$

- **Uminterpretation von β als „Imaginäre Zeit“:**

$$\langle \exp(-\beta\mu)\phi_0, \exp(+\beta\mu)\phi_0^*, 0 | \exp(\underbrace{-\beta\mathbf{H}}_{-i(-i\beta)\mathbf{H}}) = \langle \exp(\beta\mu)\phi_0, \exp(-\beta\mu)\phi_0^*, t = -i\beta |$$

$\Rightarrow$

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_0 \mathcal{D}\phi_0^* \langle \exp(-\beta\mu)\phi_0, \exp(+\beta\mu)\phi_0^*, t_f = -i\beta | \phi_0, \phi_0^*, t_i = 0 \rangle$$

- unter Funktionalintegral: **Übergangsmatrixelement für imaginäre Zeit**
- $\Rightarrow$ **euklidisches Pfadintegral**
- substituiere $t = -i\tau$, $\tau \in [0, \beta]$ in Lagrangian

– **Lagrangian für euklidische Feldtheorie**

$$\mathcal{L}_E = -\mathcal{L}_{t=-i\tau} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi + V(|\phi|).$$

- mit euklidischen Vierervektoren $(\tau, \vec{x})$ und $x_\mu x_\mu = \tau^2 + \vec{x}^2$
- $d^4 x = -i d\tau d^3 \vec{x} = -i d_E^4 x \Rightarrow$ **Euklidische Wirkung**:

$$i \int d^4 \mathcal{L} \Rightarrow i \int d_E^4 x (-i)(-\mathcal{L}_E) = - \int d_E^4 x \mathcal{L}_E = -S_E[\phi, \phi^*].$$

- „Übergangsmatrixelement“ als Pfadintegral

$$\langle \exp(-\beta\mu)\phi_0, \exp(+\beta\mu)\phi_0^*, -i\beta \mid \phi_0, \phi_0^*, 0 \rangle = \mathcal{N} \int_{\text{KMS}} D\phi D\phi^* \exp[-S_E(\phi, \phi^*)]$$

- KMS: **Kubo-Martin-Schwinger-Randbedingungen** [Kub57, MS59]

$$\begin{aligned} \phi(\tau = \beta, \vec{x}) &= \exp(-\beta\mu)\phi_0(\vec{x}), & \phi^*(\tau = \beta, \vec{x}) &= \exp(+\beta\mu)\phi_0^*(\vec{x}), \\ \phi(\tau = 0, \vec{x}) &= \phi_0(\vec{x}), & \phi^*(\tau = 0, \vec{x}) &= \phi_0^*(\vec{x}). \end{aligned}$$

- **Pfadintegral für Zustandssumme**

$$Z = \mathcal{N} \int D\phi_0 D\phi_0^* \int_{\text{KMS}} D\phi D\phi^* \exp[-S_E(\phi, \phi^*)]$$

- **Freie Felder: relativistisches ideales geladenes Bosegas**

- kann berechnet werden, da dann **Gaußsches Funktionalintegral**

$$\mathcal{L}_E = (\partial_\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi$$

- Euklidische Wirkung

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x \mathcal{L}_E = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x \phi^* (-\square_E + m^2) \phi$$

- NB: partielle Integration im Wirkungsintegral auch für τ -Integral ohne Randterme wegen der quasiperiodischen KMS-Bedingungen!
- $\rightarrow$ Exkurs zu Gauß-Integralen (s. Anhang 3) $\Rightarrow$ (alle evtl. auftretenden indefiniten Faktoren werden in $\mathcal{N}$ zusammengefasst):

- damit gilt formal

$$Z = \left[\det \left(\frac{-\square_E + m^2}{M^2} \right) \right]^{-1} = \exp \left[-\text{Tr} \ln \left(\frac{-\square_E + m^2}{M^2} \right) \right]$$

M : Energieskala, die Argument der Determinante dimensionslos macht; $\hat{=}$ indefiniter Konstante $\mathcal{N}$

- zur Berechnung der Spur: **löse Eigenwertproblem des Operators $-\square_E + m^2$**
- Eigenfunktionen müssen KMS-Bedingung erfüllen

$$(-\square_E + m^2)\varphi = \lambda\varphi, (-\square_E + m^2)\varphi^* = \lambda\varphi$$

- Fourier-Entwicklung
- bzgl. $\vec{x}$ zur Regularisierung „Box-Quantisierung“: Würfel der Kantenlänge L mit periodischen RBN für Felder $\Rightarrow \vec{p} \in (2\pi/L)\mathbb{Z}^3$
- bzgl. τ : **bosonische Matsubara-Frequenzen** $\omega \in (2\pi/\beta)\mathbb{Z}$ [Mat55]
- am Schluss der Rechnung wieder $L \rightarrow \infty$
- dann

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}$$

- dabei geht räumliche „Nullmode mit $\vec{p} = 0$ i.a. verloren, d.h. sie muss in Fourierdarstellung extra hingeschrieben werden:

$$\phi(x) = \underbrace{\xi \exp(-\mu\tau)}_{\varphi_0(\tau)} + \sqrt{\beta V} \sum_{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[(i\omega - \mu)\tau + i\vec{p} \cdot \vec{x}] \tilde{\phi}(\omega, \vec{p}),$$

$$\phi^*(x) = \underbrace{\xi^*(\omega) \exp(+\mu\tau)}_{\varphi_0^*(\tau)} + \sqrt{\beta V} \sum_{\omega} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \exp[(-i\omega + \mu)\tau - i\vec{p} \cdot \vec{x}] \tilde{\phi}^*(\omega, \vec{p}),$$

- Normierungsfaktor so, dass $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^*$ dimensionslos sind
- Eigenwert der Nullmoden: $\lambda_0 = m^2 - \mu^2$
- übrige Eigenwerte:

$$\lambda(p) = -(i\omega - \mu)^2 + E_p^2, \quad E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

- damit *alle* Eigenwerte $\text{Re } \lambda > 0$ erfüllen, auch Nullmode $\Rightarrow \mu^2 < m^2$
 $\Rightarrow -m < \mu < m$

- Euklidische Wirkung:

$$S_E = \beta V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi + \sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \beta^2 [-(i\omega - \mu)^2 + E_p^2] \tilde{\phi}^*(\omega, \vec{p}) \phi(\omega, \vec{p})$$

- im Pfadintegral $\phi \rightarrow \varphi_0 + \phi'$, $D\phi = D\phi'$, $\phi^* \rightarrow \varphi_0 + \phi'^*$, $D\phi^* = D\phi'^*$
 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Omega = \ln Z &= \underbrace{-\beta V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi}_{\Omega_0} + \underbrace{\ln(\mathcal{N} / \det[\beta^2(-\square_E + m^2)])}_{\Omega'} \\ &= -\beta V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi - \text{Tr} \ln \det[\beta^2(-\square_E + m^2)] - \ln \mathcal{N} \\ &= -\beta V(m^2 - \mu^2) \xi^* \xi - \sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \ln \{ \beta^2 [-(i\omega - \mu)^2 + E_p^2] + \ln \mathcal{N} \} \end{aligned}$$

- Matsubara-Summe ist divergent
- kann Summe über ω konvergent machen, indem man stattdessen

$$\partial_{m^2} \Omega' = - \sum_{\omega} V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{-(i\omega - \mu)^2 + E_p^2}$$

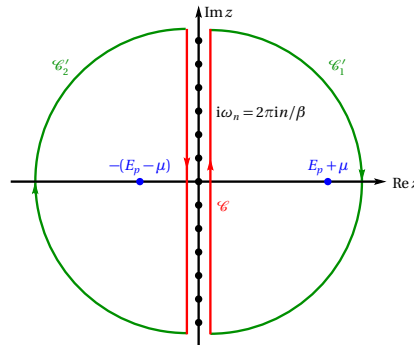
berechnet

- **Berechnen von Matsubara-Summen**

- Idee: Nutze Residuensatz der Funktionentheorie
- **Bose-Einstein-Verteilungsfunktion**

$$f_B(z) = \frac{1}{\exp(\beta z) - 1}$$

$\beta f_B(z)$ hat einfache Pole bei Matsubarafrequenzen $z = i\omega_n = 2\pi i n / \beta$,
 $n \in \mathbb{Z}$ mit Residuum 1



- **Residuensatz** für rote Kontur $\mathcal{C}$

$$\sum_{\omega} f(i\omega) = \frac{\beta}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} dz f(z) f_B(z).$$

- Reihe konvergent, wenn $f(z)$ im Unendlichen schneller als $1/z$ abfällt $\Rightarrow$: kann grüne Halbkreise hinzufügen $\Rightarrow$ tragen im Limes Radius $\rightarrow \infty$ nichts bei!
- für obige Summe für $\partial_{m^2}\Omega$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mu)^2 - E_p^2} = \frac{1}{[z-(\mu+E_p)][z-(\mu-E_p)]}$$

- die beiden rot-grünen Konturen umschließen jeweils die einfachen Pole bei $z = E_p + \mu$ und $z = -E_p + \mu$
- Konturen im Uhrzeigersinn: Faktor $-2\pi i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \partial_{m^2}\Omega' &= -V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} \{ -f_B[-(E_p - \mu)] + f_B(E_p + \mu) \} \\ &= -V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} [1 + f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu)] \end{aligned}$$

- Summen über β mit Faktoren f_B konvergent

$$\partial_{m^2}\Omega' = -\beta \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p}}_{\text{divergent!}} - V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{2E_p} [f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu)],$$

- nun ist

$$\partial_{m^2}\Omega' = \frac{1}{2m} \partial_m \Omega' = \frac{1}{2E_p} \partial_{E_p} \Omega'.$$

- integriere bzgl. E_p :

$$\Omega' = -\beta \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p}_{\text{divergent!}} - V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \ln[1 - \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 - \exp(-\beta(E_p + \mu))] \}$$

- innere Energie

$$U = -(\partial_{\beta}\Omega')_{\alpha=-\beta\mu=\text{const}} = \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p}_{\text{divergent!}} + V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p [f_B(E_p - \mu) + f_B(E_p + \mu)]$$

- $\Rightarrow$ divergentes Integral $\Rightarrow$ Nullpunktsenergien der $\vec{p}$ -Feldmoden $E_p/2$ für Teilchen und nochmal $E_p/2$ für die Antiteilchen
- taucht auf, weil wir Hamiltonian nicht wie im Operatorformalismus **normalgeordnet** sondern **Weyl-geordnet** haben!
- muss abgezogen werden $\Rightarrow$ „**Renormierung**“
- endliches großkanonisches Potential

$$\Phi(T, V, \mu, \xi, \xi^*) = -T\Omega_{\text{ren}} = V(m^2 - \mu^2)\xi^*\xi + TV \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \ln[1 - \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 - \exp(-\beta(E_p + \mu))] \}$$

- Bestimmung der Parameter ξ und ξ^* bzw. $\xi^*\xi$: Φ muss **minimiert werden** bzgl. solcher indeterminierter Parameter (Thermodynamik! s. [Cal85])
- für $|\mu| < m$: $|\xi|^2 = 0$
- für $\mu = m$: $|\xi|^2$ indeterminiert
- **Gesamtladung (Nettoteilchenzahl):**

$$q = -\partial_\mu \Phi = \underbrace{2V\mu\xi^*\xi}_{q_{\text{cond}}} + \underbrace{V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} [f_B(E_p - \mu) - f_B(E_p + \mu)]}_{q_{\text{ang}}}$$

- für $\mu > 0$ ist $q > 0 \Rightarrow$ mehr Teilchen als Antiteilchen
- für $\mu < 0$ ist $q < 0 \Rightarrow$ mehr Antiteilchen als Antiteilchen
- für kleine $T < T_{\text{krit}}$ bzw. große β liefert maximalstmöglicher Wert $\mu = m$ nur $0 < q_{\text{ang}} < q \Rightarrow$ muss $|\xi|^2$ so wählen, dass q_{cond} fehlende Teilchenzahl ergibt
- T_{krit} wird bestimmt durch Bedingung $q_{\text{ang}} = q$
- entsprechend für Antiteilchenüberschuss: für $T < T_{\text{krit}}$ liefert $\mu = -m$ nur $0 > q_{\text{ang}} > q \Rightarrow |\xi|^2$ so wählen, dass $q_{\text{cond}} < 0$ fehlende Antiteilchenzahl liefert
- Term kommt von Nullmode (s.o.): für $T < T_{\text{krit}}$ ist **makroskopischer Anteil** der Gastteilchen (bzw. Gasantiteilchen) im **Einteilchengrundzustand** bei $\vec{p} = 0$
- **Bose-Einstein-Kondensat** [Ein24, Ein25]
- $|\xi|^2$ ist **Ordnungsparameter** für Phasenübergang zwischen Zuständen mit und ohne Bose-Einstein-Kondensat

- Für **endliches** L : komme mit $|\xi|^2 = 0$ aus, da Beitrag der Summe von $\vec{p} = 0$ beliebig mit $\mu \rightarrow \pm m$ betragsmäßig beliebig groß gemacht werden kann

Fermionen

- analog wie bei Bosonen aber mit **Grassmann-Zahlenwertigen Feldern**
- quasiperiodische Randbedingen bei Bosonen $\rightarrow$ **antiquasiperiodische Randbedingungen bei Dirac-Fermionen**

$$\begin{aligned}\psi(\tau = \beta, \vec{x}) &= -\exp(-\beta\mu)\psi(\tau = 0, \vec{x}), \\ \bar{\psi}(\tau = \beta, \vec{x}) &= -\exp(+\beta\mu)\bar{\psi}(\tau = 0, \vec{x}),\end{aligned}$$

- **fermionische Matsubara-Frequenzen**

$$\omega \in \frac{(2\mathbb{Z} + 1)\pi}{\beta}$$

- Summen über fermionische Matsubarasummen: $-\beta f_F$ mit **Fermi-verteilungsfunktion**

$$f_F(z) = \frac{1}{\exp(\beta z) + 1}$$

- keine Nullmoden $\Rightarrow$ Zustandssumme

$$\Omega = \ln Z = V g_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \{ \ln[1 + \exp(-\beta(E_p - \mu))] + \ln[1 + \exp(-\beta(E_p + \mu))] \}.$$

- Spinentartungsfaktor: $g_s = 2s + 1 = 2$

- **Wechselwirkende Theorie**

- wieder einfachstes Beispiel: $\lambda \phi^4$ mit $\phi \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu = 0$ (keine erhaltene Ladungen)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

- für Zustandssumme, Ω , Φ : formal exakt gleiche **erzeugende Funktionale** wie im Vakuum
- aber: **Imaginärzeit** $t = -i\tau$, $\tau \in [0, \beta]$
- Vertex: $-\lambda/4!$

- Propagator

$$\Delta_M(p_E) = \frac{1}{-(i\omega)^2 + \vec{p}^2 + m^2}, \quad \omega \in (2\pi/\beta)\mathbb{Z}$$

- Korrekturen zu $\Omega = \ln Z$: alle geschlossenen zusammenhängenden Diagramme

- **Wiederherstellung der chiralen Theorie**

- betrachte einfachstes lineares σ -Modell (mit Pionen und σ -Mesonen)
- $\phi = (\sigma, \vec{\pi})^T \in \mathbb{R}^4$
- $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie realisiert durch $SO(4)$ (im **chiralen Limites**)

$$\mathcal{L}_{\chi \text{ limit}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - f_\pi^2)^2$$

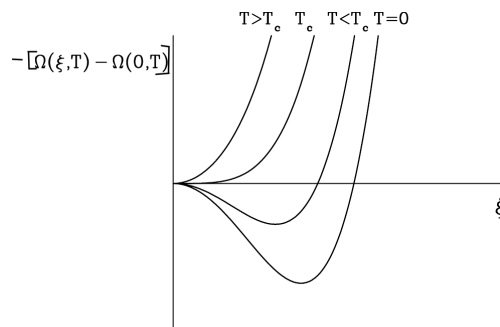
- kann mit isospin-chemischem Potential gerechnet werden (hier zur Einfachheit $\mu_I = 0$)
- berechne **effektives Quantenpotential** als

$$V(\xi, T) = -\Omega(x, T) = -\ln Z(\varphi, T)$$

$$Z(\xi, T) = \mathcal{N} \int_{\text{KMS}} D\phi \exp[-S_E(\xi + \varphi)]$$

- einige Beispieldiagramme

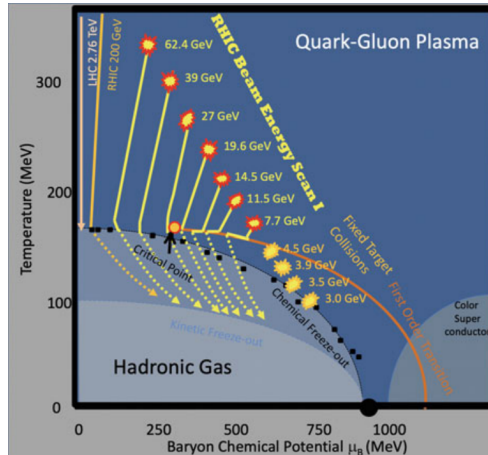
- divergente Teile müssen renormiert werden: **geht mit reinen Vakuum-Gegentermen**
- T - (und μ -)abhängiges Potential



- Grundzustand im Minimum des Potentials
- ξ : Ordnungsparameter $\Rightarrow \xi > 0$ chiral gebrochene Phase
- masselose Pionen
- Nambu-Goldstone-Bosonen der spontan gebrochenen Symmetrie: $SO(4) \rightarrow SO(3)$
- σ -Meson massiv
- für $T > T_c$: $\xi = 0 \Rightarrow$ spontane Symmetriebrechung aufgehoben
- Pionen werden **massiv** und haben gleiche Masse wie σ

- **Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Materie**

- aus QCD-Sicht interpretiert: **Schmelzen des Quark-Kondensats**
- Gitter-QCD-Rechnung bei endlichen T ($\mu_B = 0$): Crossover-Übergang bei $T_{pc} \simeq 155$ MeV
- auch (pseudo-)kritische Temperatur des **Confinement-Deconfinement-Übergangs**
- Phasendiagramm der stark wechselwirkenden Materie
- bei endlichem baryochemischem Potential: $\mu_B \neq 0 \Rightarrow$ Gitter-QCD schwierig („sign problem“)
- Phasendiagramm nicht exakt bekannt $\Rightarrow$ **ultrarelativistische Schwerionenkollisionen**
- Phasenübergang in Natur: **$\simeq 10$ ms nach Urknall**



aus [BRST22]

3 Anhang: Gauß-Integration

Gauß-Integration

- 1D Gaußintegral

$$I = \int_{\mathbb{R}} dx \exp(-Ax^2).$$

- Trick: berechne I^2

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \exp[-A(x^2 + y^2)], \quad \text{Re } A > 0$$

- integriere in Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $d^2y = dr d\varphi$:

$$I^2 = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi r \exp(-Ar^2) = \frac{\pi}{A} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

- Gauß-Integral über komplexes Argument $z = x + iy$

$$dz dz^* := dx dy \det \frac{\partial(z, z^*)}{\partial(x, y)} = dx dy 2i$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{C}} dz dz^* \exp(-Az^* z) = 2i \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \int [-A(x^2 + y^2)] = 2i I^2 = \frac{2\pi i}{A}.$$

- Sei $\hat{A} \in \mathbb{C}^n$ selbstadjungiert mit **nur positiven Eigenwerten**
- dann existiert $\hat{U} \in \text{SU}(N)$ mit $\hat{A} = \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U}$, $\hat{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\mathbb{C}^n} dz_1 \cdots dz_n dz_1^* \cdots dz_n^* \exp(-z^\dagger \hat{A} z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} dz_1 \cdots dz_n dz_1^* \cdots dz_n^* \exp(-z^\dagger \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U} z) \end{aligned}$$

- substituiere $z' = \hat{U} z$ wegen $\det \hat{U} = 1$

$$I_n = \int_{\mathbb{C}^n} dz'_1 \cdots dz'_n dz'^*_1 \cdots dz'^*_n \exp(-z'^\dagger \hat{D} z') = \frac{(2\pi i)^n}{\prod_{j=1}^n \lambda_j} = \frac{(2\pi i)^n}{\det \hat{A}}$$

- nützliche Formel

$$\ln \det \hat{A} = \ln \prod_{j=1}^n \lambda_j = \text{tr} \ln \hat{A}$$

- Gauß-Integrale über **Grassmann-Zahlen** η_a and $\bar{\eta}_a$ ($a \in \{1, \dots, n\}$):

$$\int \prod_a d\bar{\eta}_a d\eta_a \exp(\bar{\eta}^\text{T} \hat{A} \eta) = \int \prod_a d\bar{\eta}_a d\eta_a (\cdots + \lambda_1 \cdots \lambda_n \bar{\eta}_1 \eta_1 \cdots \bar{\eta}_n \eta_n) = \prod_{a=1}^n \lambda_a = \det \hat{A}$$

4 Literatur

Literatur

Literatur

- [BRST22] D. Blaschke, K. Redlich, C. Sasaki and L. Turko (eds.), *Understanding the Origin of Matter: Perspectives in Quantum Chromodynamics*, vol. 999, Springer Nature Switzerland, Cham (2022), <https://doi.org/10.1007/978-3-030-95491-8>.
- [Cal85] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, John Wiley&Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 2 edn. (1985).
- [CSHY85] K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, Equilibrium and Nonequilibrium Formalisms made unified, Phys. Rept. **118**, 1 (1985), [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(85\)90136-X](https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90136-X).

- [Ein24] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, Königliche Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte **1924**, 261 (1924), https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf.
- [Ein25] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases – Zweite Abhandlung, Königliche Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte **1925**, 3 (1925), https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physik_ap/demokritov/mbecfornonphysicists/einstein_1924_1925.pdf.
- [Hob87] A. Hobson, *Concepts in Statistical Mechanics*, Gordon and Breach Science Publishers, 2 edn. (1987).
- [Kat67] A. Katz, *Principles of Statistical Mechanics*, W. H. Freeman and Company, San Francisco and London (1967).
- [KB61] L. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, New York (1961).
- [KG06] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory; Principles and Applications*, Cambridge University Press, 2 edn. (2006).
- [Kub57] R. Kubo, Statistical mechanical theory of irreversible processes. 1. General theory and simple applications in magnetic and conduction problems, J. Phys. Soc. Jap. **12**, 570 (1957), <https://jpsj.ipap.jp/link?JPSJ/12/570>.
- [LeB96] M. LeBellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne (1996).
- [Lv87] N. P. Landsmann and C. G. van Weert, Real- and Imaginary-time Field Theory at Finite Temperature and Density, Physics Reports **145**, 141 (1987), [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(87\)90121-9](https://doi.org/10.1016/0370-1573(87)90121-9).
- [LV16] M. Laine and A. Vuorinen, *Basics of Thermal Field Theory*, vol. 925 of *Lecture Notes in Physics*, Springer (2016), <https://doi.org/10.1007/978-3-319-31933-9>.

- [Mat55] T. Matsubara, A new Approach to Quantum Statistical Mechanics, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955),
<https://ptp.ipap.jp/link?PTP/14/351>.
- [MS59] P. C. Martin and J. S. Schwinger, Theory of Many-Particle Systems I, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959),
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.1342>.
- [Rei65] F Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw Hill Book Company, New York (1965).
- [Rei81] F Reif, *Statistische Physik*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1981).