

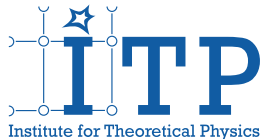
Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 12: Pfadintegrale und chirale hadronische Modelle

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

29. Januar 2026



Outline

Pfadintegral für Felder

Chirale Symmetrie der QCD und Hadronen

Literatur

Pfadintegral für Felder

Literatur: [Ram89, BL86, Col18, Hee02]

Pfadintegral für Felder

► Einfaches Spielzeugmodell: ϕ^4 -Theorie

- neutrales Skalarfeld $\phi(\underline{x}) \in \mathbb{R}$
- Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4.$$

- **Ziel:** Alternative Rechenmethode zur Berechnung **Vakuumerwartungswerte** **zeigeordneter Feldoperatorprodukte**
- via **LSZ-Reduktion** invariante **Übergangsmatrixelemente für Streuquerschnitte**
- Idee: verwende formale Eigenzustände von ϕ und kanonischen Feldimpulsen

$$\Pi(\underline{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\underline{x})} = \dot{\phi}(\underline{x})$$

- Quantisierung über **bosonische kanonische gleichzeitige Kommutatoren** im **Heisenbergbild**

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0, \quad [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0, \quad [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ analog wie Quantisierung von nichtrelativistischer Punktteilchenmechanik

$$[\mathbf{x}_j(t), \mathbf{x}_k(t)] = 0, \quad [\mathbf{p}_j(t), \mathbf{p}_k(t)] = 0, \quad [\mathbf{x}_j(t), \mathbf{p}_k(t)] = i\delta_{jk}.$$

- ▶ Orts- und Impulseigenzustände zur Zeit $t = 0$:

$$\vec{\mathbf{x}}(0)|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle, \quad \vec{\mathbf{p}}(0)|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle, \quad \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{1}, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = \mathbb{1}.$$

- ▶ Impulseigenfunktionen in der Ortsdarstellung

$$\langle x | p \rangle = \exp(i\vec{x} \cdot \vec{p}), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ mit Feldern: Freiheitsgrad-Label j in $\mathbf{x}_j$ bzw. $\mathbf{p}_j$ entspricht $\vec{x}$ in $\phi(0, \vec{x})$ bzw. $\Pi(0, \vec{x})$:

$$\phi(0, \vec{x})|\phi\rangle = \phi(0, \vec{x})|\phi\rangle, \quad \Pi(0, \vec{x})|\Pi\rangle = \Pi(0, \vec{x})|\Pi\rangle.$$

- ▶ Zeitentwicklung im **Heisenbergbild**

$$|\phi, t\rangle = \exp(it\mathbf{H})|\phi\rangle, \quad |\Pi, t\rangle = \exp(it\mathbf{H})|\Pi\rangle$$

mit Hamiltonian

$$\mathbf{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{H}(\underline{x}), \quad \mathcal{H}(\underline{x}) = \dot{\phi}(\underline{x})\Pi(\underline{x}) - \mathcal{L}$$

- ▶ Übergangsamplitude von Feldkonfiguration ϕ_i bei $t = t_i$ zu ϕ_f bei $t = t_f$

$$C_{fi} = \langle \phi_f | \exp[-i\mathbf{H}(t_f - t_i)] | \phi_i \rangle$$

Pfadintegral für Felder

- Zerlege Zeitintervall (t_i, t_f) in N Teilintervalle der Länge $\Delta t = (t_f - t_i)/N$

$$C_{fi} = \langle \phi_f | [\exp(-i\mathbf{H}\Delta t)]^N | \phi_i \rangle$$

- Schiebe formale „Vollständigkeitsrelationen“ ein:

$$\int D\phi(\vec{x}) |\phi\rangle \langle \varphi| = \mathbf{1}, \quad \int \frac{D\Pi(\vec{x})}{2\pi} |\Pi\rangle \langle \Pi| = \mathbf{1}.$$

$$\text{mit } |\phi\rangle_j = |\phi, t_j\rangle, \quad |\Pi_j\rangle = |\Pi, t_j\rangle$$

$$C_{fi}(t_f, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^N \frac{D\Pi_k D\varphi_k}{2\pi} \langle \varphi_a | \Pi_N \rangle \times \\ \times \langle \Pi_N | \exp(-i\mathbf{H}\Delta t) | \varphi_N \rangle \dots \langle \Pi_1 | \exp(-i\mathbf{H}\Delta t) | \varphi_1 \rangle \langle \varphi_1 | \varphi_a \rangle.$$

Pfadintegral für Felder

- Nehme **Weyl-Ordnung** von ϕ und Π in $\mathbf{H}$ an:
alle Faktoren Π *links* on allen Faktoren ϕ *rechts* $\Rightarrow$

$$\langle \Pi_k | \exp(-i\mathbf{H}\Delta t) | \phi_k \rangle \underset{\Delta t \rightarrow 0}{\cong} (1 - iH_k \Delta t) \exp \left[-i \int d^3 \vec{x} \Pi_k \phi_k \right]$$

- dann

$$C_{fi} = \mathcal{N} \int D\Pi \int_{\phi(t_i, \vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})}^{\phi(t_f, \vec{x}) = \varphi_f(\vec{x})} D\phi \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} d^4 x \left[\Pi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{H}(\Pi, \phi) \right] \right\}.$$

$\mathcal{N}$: nicht wohldefinierter aber unwichtiger Normierungsfaktor

- Kontinuuumlimes:

$$C_{fi} = \int D\pi \int_{\phi(t_i, \vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})}^{\phi(t_f, \vec{x}) = \varphi_f(\vec{x})} D\phi \exp \left\{ \underbrace{i \int_{t_i}^{t_f} d^4 x \left[\Pi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{H}(\Pi, \phi) \right]}_{S[\phi, \Pi]} \right\}.$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ **Vakuum**→**Vakuum**-Übergangsamplitude: führe Term $-i0^+/2\phi^2$ in Lagrangian ein (entspricht $m^2 \rightarrow m^2 - i0^+$) und $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$, $\phi_i \rightarrow 0$, $\phi_f \rightarrow 0$
- ▶ analoge Rechnung: für **zeitgeordnete Vakuumerwartungswerte**

$$\langle \Omega | T_c F[\phi, \pi] | \Omega \rangle = \mathcal{N} \int D\pi \int D\phi \exp \{ iS[\phi, \pi] \} F[\phi, \pi].$$

- ▶ **zeitgeordnete (Feynman) Green-Funktionen**

$$iG^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \langle \Omega | \mathcal{T}_c \phi(\underline{x}_1) \dots \phi(\underline{x}_n) | \Omega \rangle$$

- ▶ Erzeugendes Funktional

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\pi \int D\phi \exp \left\{ iS[\phi, \pi] + i \int d^4x J(x) \phi(x) \right\}$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ modulo unbestimmtem Faktor

$$\mathrm{i} \mathcal{N} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\mathrm{i}^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

- ▶ Ausintegration von Π

- ▶ ϕ^4 -Theorie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

$$\Rightarrow \Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi},$$

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4,$$

$$S[\phi, \Pi] = \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x [\Pi \dot{\phi} - \mathcal{H}]$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ Pfadintegral über Π : **Gauß-Funktional**
- ▶ entwickle Wirkung um **Minimum bzgl. Π**

$$\frac{\delta S}{\delta \Pi(\underline{x})} = \dot{\phi} - \Pi \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \Pi_0 = \dot{\phi}$$

$$S[\phi, \Pi] = S[\phi, \Pi_0] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \left(\frac{\delta^2 S[\phi, \Pi]}{\delta \Pi(\underline{x}) \delta \Pi(\underline{y})} \right)_{\Pi=\Pi_0} [\Pi(\underline{x}) - \Pi_0(\underline{x})][\Pi(\underline{y}) - \Pi_0(\underline{y})].$$

$$S[\phi, \Pi_0] = S[\phi, \dot{\phi}] \equiv S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi).$$

- ▶ **Lagrange-Version** des Pfadintegrals:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\phi \exp \left[i \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x (\mathcal{L} + J(\underline{x})\phi(\underline{x})) \right]$$

- ▶ **kein Gauß-Integral** $\Rightarrow$ Störungstheorie!

Pfadintegral für Felder

- ▶ generating functional for free fields

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2 - i0^+}{2}\phi^2 + J\phi, \quad \mathcal{L}_1 = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1.$$

- ▶ erzeugendes Funktional für freies Feld:

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (\mathcal{L}_0 + J(\underline{x})\phi(\underline{x})) \right]$$

- ▶ wie bei Integration über Π : von einem J -unabhängigen Faktor abgesehen ist Z_0 durch die Wirkung am stationären Punkt φ gegeben

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Rightarrow -(\square + m^2 + i0^+)\phi = -J.$$

Pfadintegral für Felder

- Lösung

$$\varphi(\underline{x}) = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' D_F(\underline{x} - \underline{x}_2) J(\underline{x}_2)$$

- erzeugendes Funktional

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \exp \left[\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x J(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) \right],$$

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_2 D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) J(\underline{x}_1) J(\underline{x}_2) \right]$$

- Erinnerung an Vorlesung 9: **Störungsrechnung**

$$Z[J] = \exp \left[-i \frac{\lambda}{4!} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \frac{\delta^4}{\delta J(\underline{x})^4} \right] Z_0[J]$$

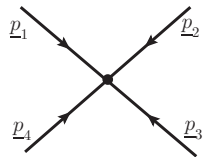
Pfadintegral für Felder

- ▶ zeitgeordnete Green-Funktionen via Taylorentwicklung der Funktionalableitungs-exp-Funktion:

$$iG^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \left[\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \right]_{J=0}$$

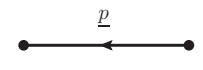
- ▶ Feynman-Diagramme: alle (verbundenen und unverbundenen) Green-Funktionen (ohne Vakuum-Vakuum-Diagramme)
- ▶ jedes zusammenhängende Diagrammteil mit wenigstens einem äußeren Punkt $\underline{x}_j$ verbunden
- ▶ **Feynman-Regeln** (im Impulsraum)

Pfadintegral für Felder



A Feynman diagram representing a four-point vertex. Four lines meet at a central black dot. The top-left line is labeled $\underline{p}_1$ with an arrow pointing towards the vertex. The top-right line is labeled $\underline{p}_2$ with an arrow pointing away from the vertex. The bottom-left line is labeled $\underline{p}_4$ with an arrow pointing towards the vertex. The bottom-right line is labeled $\underline{p}_3$ with an arrow pointing away from the vertex.

$= -\frac{i\lambda}{4!}$



A Feynman diagram representing a propagator. It consists of a horizontal line with two black dots at its ends. An arrow on the line points from the right dot to the left dot. Above the line is the label $\underline{p}$.

$= i\tilde{D}_F(\underline{p}) = \frac{i}{\underline{p}^2 - m^2 + i0^+}$

Pfadintegral für Felder

- ▶ Organisation der Störungsrechnung
- ▶ alle Green-Funktionen $G^{(n)}$ lassen sich durch Summen über Produkte von **zusammenhängenden Green-Funktionen** darstellen
 - ▶ $iG_c^{(n)}$ alle zusammenhängenden Diagramme mit n äußeren Beinen
 - ▶ **erzeugendes Funktional**

$$Z[J] = \exp(iW[J]) \Leftrightarrow iW[J] = \ln(Z[J]).$$

- ▶ zusammenhängende Green-Funktionen:

$$G_c^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(\underline{x}_1) \cdots \delta J(\underline{x}_n)} \Big|_{J=0}$$

- ▶ Beweis durch vollständige Induktion (s. [Hee02])

Pfadintegral für Felder

- ▶ **Selbstenergie- und Vertexfunktionen**
- ▶ Diagramm mit einzelnen inneren Linien: Produkte aus Diagrammen, die durch einzelne innere Linien verbunden sind
- ▶ $\Rightarrow$: alle G_c können durch Summen über Produkte von **einteilchen-irreduziblen amputierten Diagrammen**, also Selbstenergie- und Vertexeinschübe, verbunden mit inneren und äußeren Propagatorlinien dargestellt werden
- ▶ **einteilchen-irreduzible Diagramme** (one-particle irreducible oder 1PI-Diagramme): zerfallen nicht in Teile, wenn man irgendeine innere Linie durchschneidet
- ▶ **erzeugendes Funktional**: Legendre-Transformierte von W :

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(\underline{x})},$$

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \varphi(\underline{x}) J(\underline{x})$$

$$\delta\Gamma = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[\cancel{\frac{\delta W}{\delta J(\underline{x})} \delta J(\underline{x})} - \cancel{\varphi(\underline{x}) \delta J(\underline{x})} - J(\underline{x}) \delta\varphi(\underline{x}) \right] = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \delta\varphi(\underline{x}),$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(\underline{x})} = -J(\underline{x})$$

Pfadintegral für Felder

► Vertexfunktionen

$$\Gamma^{(n)}(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(\underline{x}_1) \cdots \delta \varphi(\underline{x}_n)}$$

► Spezialfall $\Gamma^{(2)}$:

$$\int d^4 y_2 \Gamma^{(2)}(x_1, y_2) G_c^{(2)}(y_2, x_2) = - \int d^4 y_2 \frac{\delta J(x_1)}{\delta \varphi(y_2)} \frac{\delta \varphi(y_2)}{\delta J(x_2)} = -\delta^{(4)}(x_1 - x_2),$$

► $\Gamma^{(2)}$: „Funktionale Inverse“ des (exakten) Propagators:

$$G_c^{(2)}(x_1, x_2) = G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \int d^4 y_1 d^4 y_2 \Gamma_J^{(2)}(y_1, y_2) i G_c^{(2)}(x_1, y_1) i G_c^{(2)}(x_2, y_2)$$

► für freie Theorie

$$-(\square_1 + m^2) D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = -\delta^{(4)}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \Rightarrow \Gamma_0^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = -(\square + m^2) \delta^{(4)}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2).$$

Pfadintegral für Felder

- Definition der **Selbstenergie**

$$\Sigma(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \Gamma_0^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) - \Gamma^{(2)}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$$

- $\Rightarrow$ **Dyson-Gleichung**

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_2 D_F(\underline{x}_1 - \underline{y}_1) \Sigma(\underline{y}_1, \underline{y}_2) G(\underline{y}_2, \underline{x}_2) = -G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$$

$$G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = D_F(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) - \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_1 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y_2 D_F(\underline{x}_1 - \underline{y}_1) \Sigma(\underline{y}_1, \underline{y}_2) G(\underline{y}_2, \underline{x}_2)$$

- wegen Translationsinvarianz:

$$G(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \equiv G(\underline{x}_1 - \underline{x}_2), \quad \Sigma(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \equiv \Sigma(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$$

- Impulsdarstellung: Fourier-Transformierte

$$\tilde{G}(\underline{p}) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \exp(i \underline{x} \cdot \underline{p}) G(\underline{x}), \quad \tilde{\Sigma}(\underline{p}) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \exp(i \underline{x} \cdot \underline{p}) \Sigma(\underline{x}), \quad \tilde{D}_F(\underline{p}) = \frac{1}{\underline{p}^2 - m^2 + i0^+}$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ Faltungssatz $\Rightarrow$ **Dyson-Gleichung**

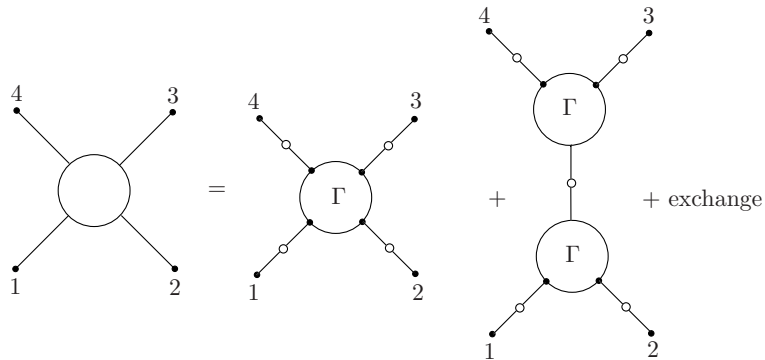
$$\tilde{G}(\underline{p}) = \frac{1}{\underline{p}^2 - m^2 + i0^+} - \frac{\Sigma(\underline{p})}{\underline{p}^2 - m^2 + i0^+} \tilde{G}(\underline{p})$$
$$\Rightarrow G(\underline{p}) = \frac{1}{\underline{p}^2 - m^2 - \Sigma(\underline{p}) + i0^+}$$

- ▶ diagrammatisch



- ▶ allgemein: $G_c^{(n)} \triangleq$ Summe über Baumgraphen mit n äußeren G -Beinchen mit exakten Vertexfunktionen und inneren G -Linien
- ▶ Beispiel: exakter Vierpunkt-Propagator

Pfadintegral für Felder



- ▶ Beweis durch vollständige Induktion: [\[Hee02\]](#)
- ▶ Theorie vollständig durch $\Gamma[\varphi]$ definiert
- ▶ Verschwindende äußere Quelle:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi(\underline{x})} = -J(\underline{x}) \stackrel{!}{=} 0.$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ **Feldgleichung für „mittleres Feld“** $\varphi \hat{=}$ Wirkungsprinzip
- ▶ $\Rightarrow \Gamma[\varphi]$ „Quantenwirkung“
- ▶ **Fermionen**
 - ▶ z.B. **Dirac-Feld**
 - ▶ Lagrangian für freies Feld

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\psi, \quad \rlap{\not{D}} = \gamma^\mu \partial_\mu \Rightarrow \Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}_a} = i\bar{\psi}_a$$

- ▶ gleiche Idee wie bei Bosonen: **Eigenvektoren des Feldoperators bzw. kanonischen Feldimpulses**
- ▶ aber: **Fermionen** $\Rightarrow$ kanonische **gleichzeitige Anti-Kommutatoren**

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} = 0, \quad \{\Pi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = 0, \quad \{\psi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

- ▶ $\Rightarrow$: für Feld-Eigenvektor

$$\psi_a(0, \vec{x})\psi_b(0, \vec{y})|\psi\rangle = \psi_a(\vec{x})\psi_b(\vec{y})|\psi\rangle = -\psi_b(0, \vec{y})\psi_a(0, \vec{x})|\psi\rangle = -\psi_b(0, \vec{y})\psi_a(0, \vec{x})|\psi\rangle$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ $\Rightarrow$ „Feldeigenwerte“ müssen **antikommutierende „c-Zahlen“** sein!
- ▶ $\Rightarrow$ **Grassmann-Algebra**
- ▶ „Grassmann-Zahlen“ bilden **komplexen Vektorraum**
- ▶ endlichdimensional: Basis $\theta_1, \dots, \theta_n$
- ▶ **antikommutatives Produkt**: $\theta_j \theta_k = -\theta_k \theta_j$
- ▶ alle Produkte auch im Vektorraum $\Rightarrow$ Vektorraum ist insgesamt 2^n -dimensional
- ▶ denn alle Produkte mit mehr als n der θ_j müssen notwendig verschwinden, da maximal $\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n$ von 0 verschieden sein kann, denn wegen Antikommutativität verschwinden alle Produkte, in denen wenigstens 2 gleiche θ_j vorkommen.
- ▶ Anzahl möglicher Produkte mit $0 \leq m \leq n$ Faktoren $m = 0$ bedeutet einfach eine komplexe Zahl, d.h. man bildet Polynome der Form

$$P(\theta_1, \dots, \theta_n) = a + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^n a_{j_1 \dots j_m} \theta_{j_1} \cdots \theta_{j_m}$$

- ▶ $a, a_{j_1 \dots j_m} \in \mathbb{C}$, $a_{j_1, \dots, j_m}$ total antisymmetrisch

Pfadintegral für Felder

- ▶ für gegebenes m gibt es offenbar $\binom{n}{m}$ verschiedene Monome $\theta_{j_1} \cdots \theta_{j_m}$
(Standardreihenfolge: $j_1 < j_2 < \dots < j_m$)
- ▶ linear unabhängige Monome bilden **Basis des Grassmann-Zahlenvektorraums**
- ▶ Anzahl:

$$d = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 1^m \cdot 1^{n-m} = (1+1)^n = 2^n.$$

- ▶ in QFT: $\psi_a(\underline{x}) \hat{=}$ überabzählbar unendlich viele θ 's
- ▶ **Analysis mit Grassmann-Zahlen**
 - ▶ Ableitung soll linearer Operator sein $\Rightarrow$ es genügt, Ableitungen von Monomen der θ_j 's zu definieren
 - ▶ **Ableitungen**: Links- und Rechts-Ableitungen

$$\partial_{\theta_{j_k}}^{(L)} \theta_{j_1} \theta_{j_{k-1}} \cdots \theta_k \cdots \theta_{j_m} = \partial_{\theta_{j_k}} (-1)^{k-1} \theta_k \theta_{j_1} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_m} \stackrel{(\text{def})}{=} (-1)^{k-1} \theta_{j_1} \cdots \theta_{j_{k-1}} \theta_{j_{k+1}} \cdots \theta_{j_m}$$

- ▶ für mehrere Ableitungen: $\partial_{\theta_j}^{(L/R)}$ **antikommutieren**

Pfadintegral für Felder

- ▶ analog für Rechtsableitung
- ▶ **Integration:** Fall mit nur 1 θ
- ▶ mögliche Polynome (Funktionen!) nur $P(\theta) = a + a_1 \theta$
- ▶ Integral über θ soll **linear und translationsinvariant** sein, d.h. für $b \in \mathbb{C}$

$$\int d\theta P(\theta) \stackrel{!}{=} \int d\theta P(\theta + b) \Rightarrow a \int d\theta 1 + a_1 \int d\theta \theta \stackrel{!}{=} (a + b a_1) \int d\theta 1 + a_1 \int d\theta \theta$$

- ▶ damit das für alle $a, a_1, b \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\int d\theta 1 = 0, \quad \int d\theta \theta \stackrel{(\text{def})}{=} 1$$

- ▶ gleiche Regel wie **Ableitung nach θ !**
- ▶ für Grassmann-Algebren mit mehreren θ_j 's

$$\int d\theta_1 \cdots d\theta_m f(\theta_1, \dots, \theta_n) = \partial_{\theta_1}^{(R)} \cdots \partial_{\theta_m}^{(R)} f(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ in QFT: lokale Observablen immer Polynome mit nur geradzahligen Monomen von Fermionenoperatoren (wegen **Mikrokausalität**)
- ▶ Erzeugendes Funktional $Z[\bar{\eta}, \eta]$ mit $\eta = \eta_a(\underline{x})$ und $\bar{\eta} = \bar{\eta}_a(\underline{x})$ als Grassmann-Generator-wertige äußere Quellen

$$Z[J] = \mathcal{N} \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left[iS[\psi] + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x [\bar{\eta}(\underline{x})\psi(\underline{x}) + \bar{\psi}(\underline{x})\eta(\underline{x})] \right]$$

▶ Symmetrien

- ▶ hier: globale Symmetrien wie U(1), SU(N)-Flavorsymmetrien etc.
- ▶ größter Vorteil der Pfadintegralmethode: Quantisierung von (abelschen und nichtabelschen) Eichtheorien
Faddeev-Popov-Quantisierung: s. z.B. [BL86, Tay76, AL73, Hee02]
- ▶ betrachte beliebigen Satz Felder Φ und erzeugende Funktionale $Z[J]$, $W[J]$ und $\Gamma[\Phi]$
- ▶ **Quantenwirkung $\Gamma[\Phi]$** hat oft gleiche Symmetrien wie klassische Wirkung $S[\Phi]$
- ▶ Herleitung: $S[\varphi]$ invariant unter einer Transformation $\Phi'(\underline{x}) = F[\Phi(\underline{x})]$
- ▶ **Annahme:** Pfadintegralmaß $D\Phi$ **invariant unter Trafo:** $DF[\Phi] = D\Phi$

Pfadintegral für Felder

- **Lie-Symmetrie:** infinitesimale Trafo: $F[\Phi](\underline{x}) = \Phi'(\underline{x}) = \Phi(\underline{x}) + \delta\Phi[\Phi, \underline{x}]$

$$Z[J] = \int D\Phi \exp \left[iS[\Phi] + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \Phi(\underline{x}) \right]$$

- Invarianz der Wirkung: $S[\Phi'] = S[\Phi]$ und des Pfadintegralmaßes $D\Phi' = D\Phi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D\Phi' \exp \left[iS[\Phi'] + \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \Phi'(\underline{x}) \right] \\ &\stackrel{\text{symm}}{=} \int D\Phi \exp \left[iS[\Phi] + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) [\Phi(\underline{x}) + \delta\Phi(\underline{x})] \right] \\ &= \int D\Phi \left[1 + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4y J(\underline{y}) \delta\Phi[\Phi, \underline{y}] \right] \exp \left[iS[\Phi] + i \int_{\mathbb{R}^4} d^4x J(\underline{x}) \Phi(\underline{x}) \right] \\ &= \left(1 + \int_{\mathbb{R}^4} d^4y J(\underline{y}) \delta\Phi \left[\frac{\delta}{\delta J(\underline{y})}, \underline{y} \right] \right) Z[J] \end{aligned}$$

Pfadintegral für Felder

► $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y J(\underline{y}) \delta \Phi \left[\frac{\delta}{\delta J(\underline{y})}, \underline{y} \right] Z[J] = 0$$

► Annahme: **lineare Symmetrie**: $\delta \Phi(\underline{x}) = \delta \alpha_j \hat{T}_j \Phi(\underline{x})$ ($\delta \alpha_j = \text{const}$) (**lokale Symmetrie**)
 $\Rightarrow$

$$\delta \alpha_j \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y J(\underline{y}) \hat{T}_j \frac{\delta}{\delta J(\underline{y})} Z[J] = 0$$

► $Z[J] = \exp(iW[J]) \Rightarrow$

$$\delta \alpha_j \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y J(\underline{y}) \hat{T}_j \frac{\delta}{\delta J(\underline{y})} W[J] = 0$$

► für $\Gamma[\Phi]$:

$$\delta \alpha_j \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \frac{\delta \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(\underline{y})} \hat{T}_j \Phi = 0$$

► $\Rightarrow \Gamma[\Phi]$ hat **dieselbe Symmetrie wie $S[\Phi]$**

Pfadintegral für Felder

- ▶ **CAVEAT:** falls $D\Phi$ NICHT invariant unter Trafo ist $\Rightarrow \Gamma[\Phi]$ nicht notwendig symmetrisch
- ▶ $S[\phi]$ symmetrisch, $\Gamma[\Phi]$ nicht symmetrisch: **Anomalie**, d.h. quantisierte Feldtheorie *nicht* symmetrisch, obwohl klassische Theorie symmetrisch ist!
- ▶ z.B. Adler-Bell-Jackiw-Anomalie: **Anomalie der axialen $U(1)_A$ -Symmetrie der (masselosen) QED und QCD (s.u.)** [Adl69, BJ69, PS95]

Spontane Symmetriebrechung

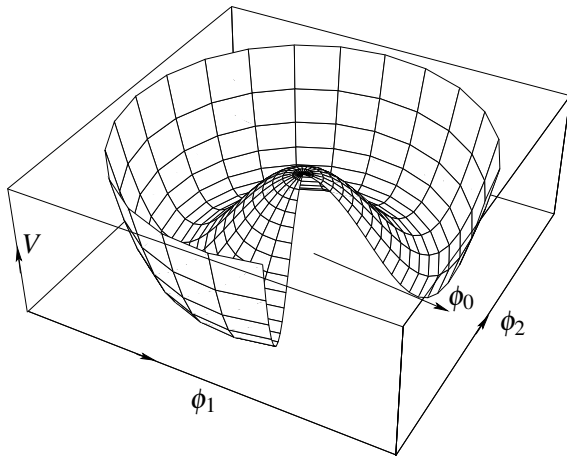
- ▶ betrachte Theorie mit N reellen Skalarfeldern $\vec{\phi} = (\phi_j)$, die unter $SO(N)$ -Transformationen symmetrisch ist:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi})(\partial^\mu \vec{\phi}) + \underbrace{\frac{\mu^2}{2}\vec{\phi}^2 - \frac{\lambda}{8}(\vec{\phi}^2)^2}_{-V[\vec{\phi}]}.$$

- ▶ Lie-Algebra: antisymmetrische $\mathbb{R}^{N \times N}$ -Matrizen
- ▶ Dimension der Lie-Algebra: $N(N-1)/2$
- ▶ „falsches Vorzeichen“ des Massenterms ist hier Absicht!

Pfadintegral für Felder

► **Potential:**



Pfadintegral für Felder

- ▶ muss um **stabilen Grundzustand** entwickeln:

$$V(|\vec{\phi}|) = -\frac{\mu^2}{2} \vec{\phi}^2 + \frac{\lambda}{8} (\vec{\phi}^2)^2$$

- ▶ Minima $|\vec{\phi}| = v \Rightarrow$ **Grundzustand entartet**
- ▶ $V'(v) = (-\mu^2 + \lambda v^2/2)v \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ Minimum bei $v = \mu\sqrt{2/\lambda}$.
- ▶ entwickle um einen beliebig gewählten Grundzustand: $\vec{v} = (v, 0, 0, \dots, 0)$
- ▶ effektive Wirkung invariant, da Pfadintegralmaß $D\phi = D\phi_1 D\phi_2 \cdots D\phi_N$ invariant unter $SO(N)$ -Transformationen
- ▶ damit

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_j(\underline{y})} T_{jk}^a \phi_k(\underline{y}) = 0$$

- ▶ take functional derivative $\delta/\delta\phi_l(0)$ and then set $\vec{\phi} = \vec{v} \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_j(\underline{y}) \delta \phi_l(0)} T_{jk}^a v_k = - \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y G_{jl}^{-1}(\underline{y}) T_{jk}^a v_k = 0.$$

Pfadintegral für Felder

- ▶ in Impulsdarstellung:

$$\tilde{G}_{jl}^{-1}(\underline{p}=0)T_{jk}^a v_k = M_{jl} T_{jk}^a v_k = 0.$$

- ▶ $\tilde{G}_{jl}^{-1}(\underline{p}=0)$: **Massenmatrix** der $\vec{\varphi}$
- ▶ von den $N(N-1)/2$ $\text{so}(N)$ -Basismatrizen $\hat{T}^a$ ergeben die $(N-1)(N-2)/2$ Generatoren der $\text{SO}(N-1)$ -Symmetriegruppe, die das Vakuum invariant lassen $\hat{T}^a \underline{v} = 0$.
- ▶ für die übrigen $[N(N-1) - (N-1)(N-2)]/2 = N-1$ Generatoren ist $g_j^{(a)} = T_{jk}^a v_k \neq 0$ Eigenvektor von $\hat{M}$ zum Eigenwert 0
- ▶ $\Rightarrow$ von den N Teilchen der $\vec{\varphi}$ -Felder sind $(N-1)$ masselos (**Nambu-Goldstone-Bosonen**)
- ▶ **Goldstone-Theorem**: spontan gebrochene **globale Symmetrie** $\Rightarrow$ so viele masselose Nambu-Goldstone-Bosonen wie symmetriebrechende Generatoren der Symmetrie
- ▶ Anschauung: die Feldanregungen, die „Drehungen“ im Minimum des „Sombbrero-Potentials“ entsprechen, benötigen keine Energie, da sie derselben niedrigsten „Vakuumenergie“ entsprechen

Chirale Symmetrie und Hadronen

Literatur: [Koc97, Sch03]

Quantumchromodynamik: QCD

- ▶ Theorie der starken Wechselwirkung (s. Vorlesung 11) QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}(i\not{D} - \hat{M})\psi$$

- ▶ nicht-Abelsche Eichgruppe $\text{SU}(3)_{\text{color}}$

- ▶ jedes Quark Farbtuplett: $\psi = (\psi_r, \psi_g, \psi_b)$ mit Dirac-Spinoren ψ_k
- ▶ eich-kovariante Ableitung: $D_\mu = \partial_\mu + ig \hat{T}^a A_\mu^a$ ($a \in \{1, \dots, 8\}$)
- ▶ Feldstärketensor: $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$
- ▶ Strukturkonstanten f^{abc} : $[\hat{T}^a, \hat{T}^b] = if^{abc} \hat{T}^c$, $\hat{T}^a = (\hat{T}^a)^\dagger \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$

- ▶ Teilcheninhalt

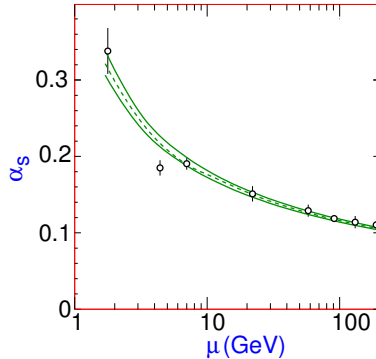
- ▶ ψ : Quarks mit Flavor ($u, d; c, s; t, b$) (Masseneigenzustände!)
- ▶ $\hat{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ = Stromquarkmassen
- ▶ A_μ^a Gluonen, Eichbosonen der $\text{SU}(3)_{\text{color}}$

- ▶ Symmetrien

- ▶ fundamentale lokale $\text{SU}(3)_{\text{color}}$ -Symmetrie
- ▶ im Sektor der leichten Quarks $u, d, (s)$: näherungsweise chirale Symmetrie ($\hat{M} \rightarrow 0$)
- ▶ Skaleninvarianz für $\hat{M} \rightarrow 0$

Eigenschaften der QCD

- ▶ **asymptotische Freiheit** bei **großen Impulsüberträgen** in Stößen $\alpha_s = 4\pi g_s^2 \rightarrow 0$
- ▶ **Laufen der Kopplungskonstante** aus der **Renormierungsgruppengleichung**:
Physik-Nobelpreis 2004 an D. Gross, F. Wilczek, H. D. Politzer



- ▶ Quarks und Gluonen **in farb-neutralen Hadronen eingeschlossen (Confinement)**
- ▶ theoretisch noch nicht vollständig verstanden (nichperturbatives Phänomen!)
- ▶ Gitter-QCD-Rechnungen: QCD beschreibt erfolgreich das **Massenspektrum** der

Chirale Symmetrie der (masselosen) QCD

- ▶ betrachte nur **leichte** u - und d -Quarks
- ▶ **Isospin-Dublett**: $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$
- ▶ NB: ψ at 3 Indizes: Dirac-Spinor, Color und Isospin!
- ▶ γ -Matrizen: $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1}$, $\gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$
- ▶ Dirac-Beziehungen für **links- und rechtshändige Komponenten**

$$\psi_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} \psi = P_L \psi, \quad \psi_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} \psi = P_R \psi,$$

$$P_{L/R}^2 = P_{L/R}, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0, \quad P_{L/R} \gamma_5 = \gamma_5 P_{L/R} = \mp P_{L/R}$$

$$P_{L/R} \gamma_\mu = \gamma_\mu P_{R/L}, \quad \overline{P_L \psi} = \overline{\psi} P_R, \quad \overline{P_R \psi} = \overline{\psi} P_L$$

$$\overline{\psi} \gamma_\mu \psi = \overline{\psi_L} \gamma_\mu \psi_L + \overline{\psi_R} \gamma_\mu \psi_R, \quad \overline{\psi} \psi = \overline{\psi_L} \psi_R + \overline{\psi_R} \psi_L$$

- ▶ $\overline{\psi} := \psi^\dagger \gamma_0$, $\overline{\gamma_5 \psi} = \psi^\dagger \gamma_5^\dagger \gamma_0 = -\overline{\psi} \gamma_5$
- ▶ im masselosen Limtes ($m_u = m_d = 0$)

$$\mathcal{L}_{u,d} = \overline{\psi} i \not{D} \psi = \overline{\psi_L} i \not{D} \psi_L + \overline{\psi_R} i \not{D} \psi_R$$

Chirale Symmetrie der (masselosen) QCD

- ▶ im masselosen Limes ($m_u = m_d = 0$) $\Rightarrow$ globale **chirale Symmetrien**:
 - ▶ Änderung von voneinander **unabhängigen** für die **links-** und **rechtshändigen** Komponenten:

$$\psi_L(x) \rightarrow \exp(-i\phi_L)\psi_L(x), \quad \psi_R(x) \rightarrow \exp(-i\phi_R)\psi_R(x)$$

- ▶ Symmetriegruppe $U(1)_L \otimes U(1)_R$
- ▶ unabhängige **Isospinrotationen**:

$$\psi_L(x) \rightarrow \exp(-i\vec{\alpha}_L \cdot \vec{T})\psi_L(x), \quad \psi_R(x) \rightarrow \exp(-i\vec{\alpha}_R \cdot \vec{T})\psi_R(x)$$

- ▶ $\vec{T} = \vec{\tau}/2$, $\vec{\tau}$: **Pauli-Matrizen**; Symmetriegruppe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$
- ▶ alternative Notation skalare und pseudoskalare Phasenänderung und Isospinrotationen

$$\psi \rightarrow \exp(-i\phi_s)\psi, \quad \psi \rightarrow \exp(-i\gamma_5\phi_a)\psi$$

$$\psi \rightarrow \exp(-i\vec{\alpha}_V \cdot \vec{T})\psi, \quad \psi \rightarrow \exp(-i\gamma_5\vec{\alpha}_A \cdot \vec{T})\psi$$

- ▶ $U(1)_s$ und $SU(2)_V$ **sind Untergruppen der chiralen Symmetrien**, die auch **Symmetrien** bleiben, wenn $m_u = m_d \neq 0 \Rightarrow$ Heisenbergs Isospinsymmetry!

Ströme: Beziehung mit Mesonen

- ▶ Quellen: [Koc97, Sch03, Din11]
- ▶ Noether: jede Symmetrie impliziert **Erhaltungsgröße**
- ▶ Noether-Ströme für **chirale Symmetrien**

$$j_s^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad j_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$$
$$\vec{j}_V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{T} \psi, \quad \vec{j}_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \vec{T} \psi$$

- ▶ Beziehung zu Mesonen über entsprechende **Quantenzahlen**:
 - ▶ σ (bzw. f_0): $\bar{\psi} \psi$ (Skalar und Isoskalar)
 - ▶ π : $i \bar{\psi} \vec{T} \gamma_5 \psi$ (Pseudoskalar und Isektor)
 - ▶ ρ 's: $\bar{\psi} \gamma_\mu \vec{T} \psi$ (Vektor und Isektor)
 - ▶ a_1 's: $\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{T} \psi$ (Axialvektor und Isoaxialvektor)
- ▶ σ and π 's; ρ 's and a_1 's **haben nicht gleiche Masse**
- ▶ QCD-Grundzustand **nicht symmetrisch** unter Pseudoscalar- and Pseudovektor-Transformationen $\langle \Omega | \bar{\psi} \psi | \Omega \rangle \neq 0$

Spontane Symmetriebrechung

- ▶ **spontan gebrochene Symmetrie**: Grundzustand nicht symmetrisch
- ▶ $\Rightarrow$ **Grundzustand entartet**
- ▶ Grundzustand symmetrisch unter isoskalaren und Isovektortransformationen
 $U(1)_L \times U(1)_R$ gebrochen zu $U(1)_s$; $SU(2)_L \times SU(2)_R$ gebrochen zu $SU(2)_V$
- ▶ für jede gebrochene Symmetrie **masseloses Nambu-Goldstone-Boson**
- ▶ hier: drei Pionen sehr leicht im Vergleich zu anderen Hadronen ($m_\pi \simeq 140$ MeV)
- ▶ $m_\pi \neq 0$: **explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch m_u, m_d**
 - ▶ kann störungstheoretisch behandelt werden $\Rightarrow$ **chirale Störungstheorie**
 - ▶ Axialvektorstrom nur näherungsweise erhalten
 $\Rightarrow$ **PCAC** (partially conserved axial current)
 - ▶ erklärt viele Hadroneneigenschaften

Spontane Symmetriebrechung

► $U(1)_a$ -Anomalie (Adler-Bell-Jackiw-Anomalie)

- klassische Theorie invariant unter $U(1)_a \Rightarrow$ in Quantenfeldtheorie explizit **gebrochen** (hier ohne Beweis) [PS95]
- Grund: Pfadintegralmaß $D\bar{\psi}D\psi$ **nicht invariant** unter $U(1)_a$ -Trafos [Fuj79, Fuj80]
- wichtig für korrekte Vorhersage der Zerfallsrate für $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$
- pseudoskalarer Strom nicht erhalten: $\partial_\mu j_a^\mu = 3/8\alpha_s \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a$
- weiterer Hinweis in SU(3)-Quarkmodell (Gell-Mann): **pseudoskalares Mesonen-Nonet** zwei isospinskalare Mesonen η (zumeist SU(3)-Oktett) und η' (zumeist SU(3)-Singulett)
- $\eta \simeq \bar{q}\gamma^5 \hat{\lambda}_8 \bar{q}$ (mit $q = (u, d, s)$) $\Rightarrow$ keine Anomalie des entsprechenden Axialvektorstroms
- aus gleichem Grund Isovektor-Axialvektorstrom $\simeq \bar{q}\gamma^5 \gamma^\mu \hat{\tau} q$ erhalten (keine Anomalie wegen $\text{tr } \hat{\tau} = 0$)
- η schwerer als π 's wegen schwerer s-Quarkmasse
- $\eta' \simeq \bar{q}\gamma^5 \bar{q} \Rightarrow$ Axialvektorstrom anomal gebrochen

Minimales chirales Modell für Pionen und Nukleonen

- ▶ σ -Meson und Pionen (chirale Partner)
- ▶ Meson = $\bar{q}$ - q -Bindungszustand
- ▶ infinitesimale chirale Transformationen für Quarks ($\vec{T} = \vec{\tau}/2$) in $SU(2)_L \times SU(2)_R$ model

$$\psi \rightarrow (1 - i\delta \vec{\alpha}_V \cdot \vec{\tau}/2)\psi \quad (\text{Isovektor-Transformation})$$

$$\psi \rightarrow (1 - i\gamma_5 \delta \vec{\alpha}_A \cdot \vec{\tau}/2)\psi \quad (\text{Isoaxialvektor-Transformation})$$

- ▶ $\Rightarrow$ Transformationseigenschaften von **Mesonefeldern** unter chiralen Transformationen: $\sigma \sim \bar{\psi}\psi$, $\vec{\pi} \sim i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi$

$$\sigma \rightarrow \sigma - \delta \vec{\alpha}_A \cdot \vec{\pi}, \quad \vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \delta \vec{\alpha}_V \times \vec{\pi} + \delta \vec{\alpha}_A \sigma$$

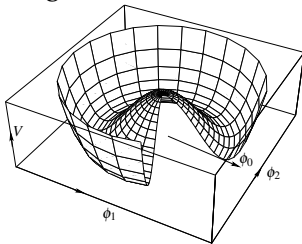
- ▶ $\sigma^2 + \vec{\pi}^2$ invariant $\Rightarrow$ chirale Transformation durch $SO(4)$ -Transformation von $\phi = (\sigma, \vec{\pi})^T$ realisiert

Minimales σ -Modell für Mesonen

- ▶ chirale Symmetrie als $SO(4)$ -Transformationen von Meson-Feldern $\phi \in \mathbb{R}^4$
- ▶ beschreibt σ -Meson und die drei Pionen ($\pi^\pm, \pi^0$)

$$\mathcal{L}_{\chi\text{limit}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - f_\pi^2)^2$$

- ▶ spontane Symmetriebrechung: „Sombbrero-Potential“



Minimales σ -Modell für Mesonen

- ▶ Entartung des Grundzustandes $\Rightarrow$ man braucht keine Energie, um Felder innerhalb des Potentialminimums zu drehen
 $\Rightarrow$ **masselose Nambu=Goldstone-Bosonen (Pionen)**
- ▶ Vakuumerwartungswert $\langle \phi^0 \rangle = f_\pi \neq 0$ (NB: Vakuum immer noch Poincaré-invarianter Zustand $\langle \Phi^0 \rangle = \text{const}$)
- ▶ Symmetrie **spontan gebrochen** von $SO(4)$ zu $SO(3)_V$ ($\dim SO(4) = 4 * 3/2 = 6$, $\dim SO(3) = 3 * 2/2 = 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3$ Nambu-Goldstone-Bosonen (Pionen))
- ▶ Teilcheninhalt des Modells: **vier skalare reelle Feldfreiheitsgrade** $\Rightarrow$ 3 masselose Pionen und 1 massives σ -Meson

Pionenzerfall und PCAC

- ▶ schwacher Zerfall $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
- ▶ schwache Wechselwirkung: chirale Eichtheorie mit Eichgruppe $SU(2)_{\text{W-iso}} \otimes U(1)_{\text{W-Y}}$ -Eichgruppe
- ▶ Kopplung der schwachen Eichbosonen an Strom $J_V^\mu - J_A^\mu$ **maximale Verletzung der Spiegelsymmetrie/Parität**
- ▶ Pion **pseudoskalar** $\Rightarrow$ Zerfall wegen **Axialstrom** $\Rightarrow$

$$\langle 0 | J_A^{a\mu}(x) | \pi_b(p) \rangle = i p^\mu \delta_{ab} f_\pi \exp(-i p \cdot x)$$

- ▶ Zerfallsrate $\Rightarrow f_\pi \simeq 93 \text{ MeV}$

$$\langle 0 | \partial_\mu J_A^{a\mu}(x) | \pi_b(p) \rangle = -f_\pi p^2 \delta^{ab} \exp(-i p \cdot x) = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} \exp(-i p \cdot x)$$

- ▶ exakte chirale Symmetrie $\Rightarrow m_\pi = 0$ (Goldstone-Theorem) $\Rightarrow \partial_\mu J_A^{a\mu} = 0$ (Noether)
- ▶ $m_\pi \neq 0$ aber „klein“ $\Rightarrow$ näherungsweise erhaltener Axialvektorstrom (**PCAC**)
- ▶ im effektiven Modell

$$J_{A,\pi}^{a\mu} = f_\pi \partial_\mu \phi^a, \quad a \in \{1, 2, 3\}$$

Explizite Symmetriebrechung

- ▶ explizite Brechung wegen $m_u, m_d \neq 0$
- ▶ symmetriebrechender Term in QCD: $\mathcal{L}_{\chi\text{SB}} = -m\bar{\psi}\psi$
- ▶ $m = (m_u + m_d)/2$; wegen $\bar{\psi}\psi \sim \sigma \Rightarrow$ in hadronischem Modell

$$\mathcal{L}_{\chi\text{SB}} = -\epsilon\sigma$$

- ▶ σ - π -Potential:

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4} [(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - v_0^2]^2 - \epsilon\sigma$$

- ▶ Potential in σ -Richtung verkippt $\Rightarrow$ führt zu korrekten „Richtung“ des (nun nicht mehr entarteten) Vakuums
- ▶ Minimum bei $f_\pi \Rightarrow$

$$v_0 = f_\pi - \frac{\epsilon}{2\lambda f_\pi^2}, \quad m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2 + \frac{\epsilon}{f_\pi}, \quad m_\pi^2 = \frac{\epsilon}{f_\pi}$$

Explizite Symmetriebrechung

- ▶ Noether + explizite Brechung der Symmetrie + PCAC (**consistency!**):

$$\partial_\mu J_A^{a\mu} = -\epsilon \pi^a \stackrel{\text{PCAC}}{=} -f_\pi m_\pi^2 \pi^a \Rightarrow \epsilon = f_\pi m_\pi^2$$

- ▶ χ SB in der QCD wie im effektiven Modell $\Rightarrow$ **Gell-Mann-Oaks-Renner-Relation**

[GMOR68]

$$\langle 0 | \epsilon \sigma | 0 \rangle = f_\pi \epsilon = m_\pi^2 f_\pi^2 = -m \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle$$

Nukleonen im σ -Modell

- ▶ Axialvektorstrom von Nukleonen mit $\Psi = (p, n)^T$ -Isospin-Dublett

$$\vec{J}_{A,\text{nucl}}^\mu = g_a \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \Psi$$

- ▶ β -Zerfall des Neutrons $\Rightarrow g_a = 1.25$
- ▶ Gesamt-Axialvektorstrom $\vec{J}_A^\mu = \vec{J}_{A,\pi}^\mu + \vec{J}_{A,\text{nucl}}^\mu$ sollte PCAC erfüllen

$$\partial_\mu \vec{J}_A^\mu = -f_\pi m_\pi^2 \vec{\pi} \Rightarrow (\square + m_\pi^2) \vec{\pi} = -g_a i \frac{M}{f_\pi} \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi$$

- ▶ Goldberger-Treiman-Relation

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{M}{f_\pi} \simeq 12.6 \quad \text{vs.} \quad g_{\pi NN}^{\text{exp}} = 13.4$$

- ▶ Erweiterung des linearen σ -Modells

$$\mathcal{L}_{\text{nucl}} = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi - g_{\pi NN} \left[\underbrace{i \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \Psi \cdot \vec{\pi} + \bar{\Psi} \Psi \sigma}_{\text{chiraler SO(4)-Skalar!}} \right]$$

Literatur

- [Adl69] S. L. Adler, Axial vector vertex in spinor electrodynamics, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.177.2426>.
- [AL73] E. Abers and B. Lee, Gauge Theories, Phys. Rept. **9**, 1 (1973), [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(73\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(73)90027-6).
- [BJ69] J. S. Bell and R. Jackiw, A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969), <https://doi.org/10.1007/BF02823296>.
- [BL86] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Adam Hilger, Bristol and Boston (1986).
- [Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), <https://doi.org/10.1142/9371>.

Literatur

- [Din11] M. Dine, Goldstone Bosons and Chiral Symmetry Breaking in QCD (2011), lecture notes,
https://scipp.ucsc.edu/~dine/ph222/goldstone_lecture.pdf.
- [Fuj79] K. Fujikawa, Path-Integral Measure for Gauge-Invariant Fermion Theories, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979),
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.1195>.
- [Fuj80] K. Fujikawa, Path Integral for Gauge Theories with Fermions, Phys. Rev. D **21**, 2848 (1980), [Erratum: Phys. Rev.D **22**,1499(1980)],
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2848>, 10.1103.
- [GMOR68] M. Gell-Mann, R. J. Oakes and B. Renner, Behavior of Current Divergences under $SU(3) \times SU(3)$, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968),
<https://link.aps.org/abstract/PR/v175/i5/p2195>.

Literatur

- [Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf>.
- [Koc97] V. Koch, Aspects of chiral symmetry, Int. J. Mod. Phys. E **6**, 203 (1997), <https://doi.org/10.1142/S0218301397000147>.
- [PS95] M. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts (1995).
- [Ram89] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley, Redwood City, Calif., 2 edn. (1989).
- [Sch03] S. Scherer, Introduction to chiral perturbation theory, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277 (2003), <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210398>.
- [Tay76] J. C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press (1976).