Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik
Vorlesung 8: Eichprinzip, QED-Lagrangian und Quantisierung

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt

Outline

„Eichung“ der globalen Phasensymmetrie

Literatur: [Col18, Wei95]

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Motivation: Prinzip zur Beschreibung von Wechselwirkungen
- klassische Elektrodynamik: Eichtheorie
- moderner Standpunkt: Symmetrie des Dirac-Lagrangians unter globalen Phasenänderungen Symmetriegruppe U(1)
  - Noether-Theorem: (lokaler) Ladungserhaltungssatz $\partial_\mu j^\mu = 0$
  - in klassischer Elektrodynamik: A_μ nur modulo einer Eichtransformationen bestimmt
  - für jedes Skalarfeld α beschreibt $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$ dieselbe Physik wie A_μ
  - bei der Eichtransformation handelt es sich also *nicht* um eine neue Symmetrie, da sie *nicht* zu einem neuen Zustand transformiert
  - stattdessen: elektromagnetisches Feld eindeutig durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bestimmt, Potentiale, die sich um Eichtransformation unterscheiden, repräsentieren das gleiche Feld
  - Darstellung als Eichfeld erweist sich bei Analyse masseloser Spin-1-Teilchen als $(1/2,1/2)$-Darstellung der Lorentzgruppe $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ als notwendig

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- andernfalls hätte man masselose Teilchen mit kontinuierlichen Polarisationsfreiheitsgraden (nie in der Natur beobachtet!) [SU76, LL91, Hee02]
- wichtig für Verständnis des Higgs-Mechanismus' (elektroschwache Wechselwirkung)
- NB: der übliche „Slang“ der Teilchenphysiker ist oft verwirrend!
- aus Sicht eines Festkörperphysikers (BCS-Theorie der Supraleitung) schön beschrieben in [Gre05]

- Eichung der „Ladungs-U(1)-Transformation“
  - freier Dirac-Lagrangian: soll jetzt Elektronen und Positronen $e^{\mp}$ beschreiben $\Rightarrow$ $q = -e$

$$\mathscr{L}^{(0)}_{e^- e^+} = \overline{\Psi}(\underline{x})(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi(\underline{x})$$

  - $e > 0$: Elementarladung
  - in unseren natürlichen Einheiten dimensionslos:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \mathrel{\widehat{=}} \frac{e^2_{\text{SI}}}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e^2_{\text{HL}}}{4\pi\hbar c} = \frac{e^2_{\text{Gauß}}}{\hbar c} = \frac{1}{137{,}035\,999\,177(21)}$$

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- will U(1)-Transformation „lokal“ machen:

$$\Psi'(\underline{x}) = \exp[-\mathrm{i}q\alpha(\underline{x})]\Psi(\underline{x}), \quad \overline{\Psi}'(\underline{x}) = \exp[+\mathrm{i}q\alpha(\underline{x})]\overline{\Psi}(\underline{x})$$

- Lagrangian *nicht* invariant unter dieser lokalen U(1)-Transformation
- Problem:

$$\partial_\mu \Psi'(\underline{x}) = \exp[-\mathrm{i}q\alpha(\underline{x})]\left[\partial_\mu - \mathrm{i}q\partial_\mu\alpha(\underline{x})\right]\Psi(\underline{x}).$$

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Lagrangian wird invariant unter lokaler U(1)-Trafo, wenn man ∂_μ durch eichkovariante Ableitung D_μ ersetzt:

$$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i} q A_\mu(\underline{x})$$

  mit Vektorfeld $A_\mu(\underline{x})$
- gibt Freiheit, dass A_μ auch unter lokaler U(1)-Tranformation transformiert wird, und zwar so, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}'_\mu \Psi'(\underline{x}) &= [\partial_\mu + \mathrm{i} q A'_\mu(\underline{x})]\Psi'(\underline{x}) \\
&= \exp[-\mathrm{i} q \alpha(\underline{x})]\left[\mathrm{D}'_\mu - \mathrm{i} q \partial_\mu \alpha(\underline{x})\right]\Psi(\underline{x}) \\
&\stackrel{!}{=} \exp[-\mathrm{i} q \alpha(\underline{x})]\mathrm{D}_\mu \Psi(\underline{x})
\end{aligned}$$

- Trafo-Verhalten von A_μ:

$$A'_\mu(\underline{x}) - \partial_\mu \alpha(\underline{x}) = A_\mu(\underline{x}) \Rightarrow A'_\mu(\underline{x}) = A_\mu(\underline{x}) + \partial_\mu \alpha(\underline{x}).$$

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Eichtransformation der klassischen E-Dynamik!
- unter *lokalen* U(1)-Trafos invarianter Lagrangian
- Prinzip der minimalen Substitution: ersetze im Lagrangian, der unter globalen U(1)-Trafos invariant ist, $\partial_\mu \rightarrow \mathrm{D}_\mu$:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{e^- e^+}} = \overline{\psi}(\underline{x})(\mathrm{i}\not{D} - m)\psi(\underline{x})$$

- ist bis auf totale Viererdivergenz reell, wenn A_μ reell ist (dann Wirkung reell)
- jetzt ist Ψ kein freies Feld mehr, denn

$$\mathscr{L}_{\mathrm{e^- e^+}} = \overline{\psi}(\underline{x})\left[\mathrm{i}\not{\partial} - m - q A_\mu(\underline{x})\gamma^\mu\right]\Psi(\underline{x}) = \mathscr{L}^{(0)}_{\mathrm{e^- e^+}} \underbrace{- A_\mu(\underline{x}) j^\mu(\underline{x})}_{\mathscr{L}_{\mathrm{I}}}, \quad j^\mu(\underline{x}) = q\overline{\psi}(\underline{x})\gamma^\mu \psi(\underline{x}).$$

- $\mathscr{L}^{(0)}_{\mathrm{e^- e^+}}$: Lagrangian für freies Dirac-Feld (quadratisch in Feldkomponenten)
- $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$: Wechselwirkung zwischen Ladung und elektromagnetischem Feld!
- es fehlt nur noch der „kinetische Term“ für das elektromagnetische Feld

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- aus klassischer E-Dynamik bekannt
  (und einziger eichinvarianter quadratischer Term, mit nur 1. Ableitungen der A_μ!)

$$\mathscr{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(\underline{x}) F^{\mu\nu}(\underline{x}), \quad F_{\mu\nu}(\underline{x}) = \partial_\mu A_\nu(\underline{x}) - \partial_\nu A_\mu(\underline{x})$$

- γ: Photon $\hat{=}$ elementare Anregung des elektromagnetischen Feldes in der quantisierten Theorie (s.u.)
- NB: Teilcheninterpretation noch weniger adäquat als für massive Teilchen!
- neuer Lagrangian

$$\mathscr{L}_{\text{QED}} = \underbrace{\overline{\Psi}(\underline{x})(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi(\underline{x}) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(\underline{x}) F^{\mu\nu}(\underline{x})}_{\mathscr{L}_{\text{QED}}^{(0)}} \underbrace{- q A_\mu(\underline{x}) \overline{\Psi}(\underline{x}) \gamma^\mu \Psi(\underline{x})}_{\mathscr{L}_{\text{I}}}.$$

- NB: quantisierte Theorie kann nicht mehr geschlossen gelöst werden $\Rightarrow$ Störungstheorie
- (formale) Entwicklung nach Potenzen von e resp. $\alpha \Rightarrow$ Feynman-Diagramme

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Bewegungsgleichungen und Interpretation
  - Wirkung: $V^{(4)} = (t_1, t_2) \times \mathbb{R}^3$

$$S[\underline{A}, \Psi, \overline{\Psi}] = \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\Psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi - A_\nu \overline{\psi} \gamma^\nu \psi.\right]$$

  - Gleichungen für das elektromagnetische Feld: variiere A^μ

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \left[-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \delta A_\nu \overline{\Psi} \gamma^\nu \psi\right] \\ &= \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \left[-F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - \delta A_\nu \overline{\Psi} \gamma^\nu \psi\right] \\ &= \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \delta A_\nu \left[+\partial_\mu F^{\mu\nu} - \overline{\Psi} \gamma^\nu \psi\right] \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

  - soll für alle δA_ν gelten: $\Rightarrow$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q \overline{\Psi} \gamma^\nu \Psi = j^\nu \tag{1}$$

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- inhomogene Maxwell-Gleichungen, denn

$$\vec{e}_n F^{0n} = \vec{e}_n(\partial^0 A^n - \partial^n A^0) = \partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} A^0 = -\vec{E},$$
$$F^{mn} = \partial^m A^n - \partial^n A^m = \partial_n A^m - \partial_\mu A^n = -\epsilon^{mna}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^a = -\epsilon^{mna} B^a, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

- $\Rightarrow$ homogene Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} A^0) + \partial_t \vec{B} = -\partial_t \vec{B} + \partial_t \vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.$$

- $\Rightarrow$ Feldgleichungen in Dreierschreibweise:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu 0} &= +\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{(1)}{=} j^0 = \rho, \\
\vec{e}_n \partial_\mu F^{\mu n} &= \vec{e}_n \left[\partial_t^2 A^n - \partial^n \partial_t A^0 + \partial_m(\partial^m A^n - \partial^n \partial_m A^m)\right] \\
&= \partial_t^2 \vec{A} + \vec{\nabla} A^0 - \Delta \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\
&= \partial_t(\partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} A^0) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} \stackrel{(1)}{=} \vec{j}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ inhomogene Maxwell-Gleichungen

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Gleichung für Ψ: Dirac-Gleichung für e^- und e^+ in Wechselwirkung mit em. Feld
  - variiere $\overline{\Psi}$
$$\delta S = \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 \underline{x} \, \delta\overline{\Psi} \left(\mathrm{i}\not{\partial} - m - \not{A}\right)\Psi.$$
  - $\Rightarrow$ Dirac-Gleichung für geladenes Teilchen in em. Feld
$$\left(\mathrm{i}\not{\partial} - m - \not{A}\right)\Psi = 0.$$
- Zur Interpretation: nichtrelativistischer Grenzfall [BD64]
  - Idee: sollte Pauli-Gleichung für ein Elektron im äußeren em. Feld erhalten (also Schrödinger-Wellenmechanik für Teilchen mit Spin 1/2)
  - niedrige Wechselwirkungsenergien mit dem em. Feld $\Rightarrow$ Positronen werden nicht erzeugt
  - $\Rightarrow$ „erstquantisierte" nichtrelativistische Wellengleichung für Spin-1/2-Elektron
  - einfacher zu finden in der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen
$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^j = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^j \\ -\hat{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix}.$$

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- $\tilde{\gamma}^0$ diagonal: obere (untere) zwei Spinor-Komponenten Eigenwert 1 (-1) $\Rightarrow$ repräsentieren Teilchen (Antiteilchen)
- gewöhnliche Spinoren wie in nichtrelativistischer Quantentheorie
- nichtrelativistischer Grenzfall: typische Impulse $|\vec{p}| \ll m$. Dann

$$E_p \simeq m + \frac{1}{2m} \vec{p}^2.$$

- Schreibe Dirac-Gleichung in „Schrödinger-artiger“ Form

$$\tilde{\gamma}^0 \mathrm{i} \partial_t \tilde{\Psi} = \left[-\mathrm{i} \vec{\tilde{\gamma}} \cdot \vec{\nabla} + m + q A_0 \tilde{\gamma}^0 - q \vec{A} \cdot \vec{\tilde{\gamma}}\right] \tilde{\Psi}.$$

- multipliziere von links mit $\tilde{\gamma}^0$:

$$\mathrm{i} \partial_t \tilde{\Psi} = \left[-\mathrm{i} \vec{\tilde{\alpha}} \cdot \vec{\nabla} + m \gamma^0 + q A_0 - q \vec{\tilde{\alpha}} \cdot \vec{A}\right] \tilde{\Psi},$$

$$\vec{\tilde{\alpha}} = \tilde{\gamma}^0 \vec{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Operator auf der rechten Seite $\widehat{=}$ Hamilton-Operator
- jetzt nicht-relativistische Näherung für Elektronen (obere beide Komponenten):

$$\tilde{\Psi} = \exp(-\mathrm{i} m t) \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{i}\partial_t \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \cdot (-\mathrm{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}) \begin{pmatrix} \psi_{e^+} \\ \psi_{e^-} \end{pmatrix} + qA^0 \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix}$$

- nichtrelativistische Näherung $E \sim \mathrm{i}\partial_t \ll m$, $\vec{p} \sim -\mathrm{i}\vec{\nabla} \ll m$, $q\vec{A} \ll m$, $qA^0 \ll m$
- $\Rightarrow$ untere Komponenten der Gleichung können genähert werden durch

$$\psi_{e^+} = \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot (-\mathrm{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}) \psi_{e^-}$$

- damit in obere Komponenten der Gl.

$$\mathrm{i}\partial_t \psi_{e^-} = \left\{ \frac{1}{2m} [\vec{\sigma} \cdot (-\mathrm{i}\vec{\nabla} - q\vec{A})]^2 + qA^0 \right\} \psi_{e^-}$$

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- werte „kinetischen Term“ aus
  (verwende $\left\{\sigma^j,\sigma^k\right\}=2\delta^{jk}$ und $\left[\sigma^j,\sigma^k\right]=2\mathrm{i}\epsilon^{jkl}\sigma^l$, $\hat{\vec{s}}=\vec{\sigma}/2$) $\Rightarrow$ Pauli-Gleichung:

$$\mathrm{i}\partial_t\psi_{\mathrm{e}^-}=\frac{1}{2m}\left[(-\mathrm{i}\vec{\nabla}-q\vec{A})^2-2q\hat{\vec{s}}\cdot\vec{B}+qA^0\right]\psi_{\mathrm{e}^-}=\hat{H}\psi_{\mathrm{e}^-}$$

- $\hat{H}$ enthält kinetischen Term

$$\hat{H}_{\text{kin}}=\frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}}-q\vec{A})^2=\frac{m}{2}\hat{\vec{v}}^2$$

- NB: $\hat{\vec{p}}=-\mathrm{i}\vec{\nabla}$ repräsentiert kanonischen Impuls
- Teilchen im Magnetfeld: kinetischer Impuls $\vec{p}_{\text{kin}}=m\vec{v}=\vec{p}_{\text{kan}}-q\vec{A}$
- Wechselwirkungspotential für magnetischen Dipol

$$V_{\text{dip}}=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- $\Rightarrow$ Operator für magnetischen Dipol des Elektrons

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{q}{2m} g_s \hat{\vec{s}}, \quad g_s = 2$$

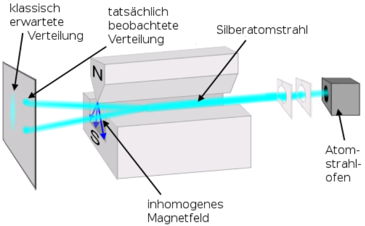
- zum Vergleich: Dipolmoment einer klassischen Stromverteilung:

$$\vec{\mu}_{\text{kl}} = \frac{q}{2m} \vec{x} \times \vec{p} = \frac{q}{2m} g_{\text{Bahn}} \vec{L}, \quad g_{\text{Bahn}} = 1$$

- kommt auch quantenmechanisch heraus, wenn man Pauli-Gleichung in Kugelkoordinaten ausarbeitet
- Gyro-Faktor $g_s = 2$ wurde *vor der Entdeckung der modernen Quantentheorie* von A. Landé empirisch durch Analyse des anomalen Zeeman-Effekts gefunden

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Stern-Gerlach-Experiment (1922 an der Uni Frankfurt!)



$$\mu_{\mathrm{e}^-} = \frac{q}{2m}\hbar = \mu_{\mathrm{B}}, \quad q = -e$$

- wurde als Erfolg des Bohr-Sommerfeld-Modells fehlinterpretiert
- heute: Spin 1/2 und Landé-Faktor 2 $\Rightarrow$ 1 Bohrsches Magneton!
- Erklärung von $g_s = 2$ galt als ein Triumph der Dirac-Gleichung
- der andere war die Vorhersage des Positrons als Antiteilchen des Elektrons (im Rahmen der Löchertheorie)

Quantisierung der QED

Literatur: [Col18, Wei95, LL91]

Quantisierung der QED 1

- Versuch kanonischer Feldquantisierung

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\gamma^{(0)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

  - kanonisch konjugierte Feldimpulse

$$\Pi_0 \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0, \quad \Pi_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^j} = -\vec{E}^j, \quad \underline{\Pi} = \underline{e}_\mu \Pi^\mu = \underline{e}_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ +\vec{E} \end{pmatrix}$$

  - naive kanonische Quantisierung unmöglich, da man offensichtich die gleichzeitige Kommutatorrelation $\left[\Pi_0(t,\vec{x}), A^0(t,\vec{y})\right] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$ nicht fordern kann
  - verschiedene Lösungen: hier Quantisierung in Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

  - Nachteil: nicht manifest Poincaré-kovariant!

Quantisierung der QED 1

- lege erst auf klassischer Ebene durch Forderung von Eichfixierungsbedingungen Potential A^μ vollständig fest
- rechne zunächst mit erhaltenem Viererstrom

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

- Coulomb-Eichung

$$\begin{aligned}
&\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} A^0, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \\
&\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla}(\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}) - \Delta \vec{A} + (\partial_t^2 \vec{A} + \partial_t \vec{\nabla} A^0) = \vec{j} \\
&\quad \Rightarrow \Box \vec{A} = \vec{j} - \partial_t \vec{\nabla} A^0 = \vec{j}_\perp \\
&\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \Rightarrow -\cancel{\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{A}} - \Delta A^0 = \rho \Rightarrow -\Delta A^0 = \rho.
\end{aligned}$$

- in Coulomb-Eichung Problem mit $\Pi^0 = 0$ gelöst $\Rightarrow$ A^0 ist kein dynamischer Freiheitsgrad

Quantisierung der QED 1

- wird ersetzt durch „instantanes Coulomb-Potential“

$$A^0(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x}' \, \frac{\rho(t,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

- in Maxwell-Ampère-Gesetz

$$\begin{aligned}\Box\vec{A} = \vec{j}_\perp = \vec{j} - \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x}' \, \frac{\vec{\nabla}'\partial_t \rho(t,\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} &= \vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x}' \partial_t \rho(t,\vec{x}')\vec{\nabla}' \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ = \vec{j} - \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x}' \partial_t \rho(t,\vec{x}')\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} &= \vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x}' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(t,\vec{x}')]\vec{\nabla} \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\end{aligned}$$

- Konsistenz mit Coulomb-Eichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \Box\vec{A} = \Box\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x}' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(t,\vec{x}')] \underbrace{\Delta \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{-4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')} = 0 \quad \text{:-)))}$$

Quantisierung der QED 1

- NB: Lösung scheint „nicht kausal" zu sein
- aber löst man Wellengleichung für $\vec{A}$ mit retardiertem Propagator (klassische Theorie!), erhält man retardierte Lösungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ [Hee21]
- Potentiale nicht beobachtbar!

- Quantisierung des freien em. Feldes
  - setze wieder $\underline{j}=0 \Rightarrow$ und verwende $\underline{A}$ der Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \stackrel{\rho=0}{\Rightarrow} A^0 = 0.$$

  - „Strahlungseichung" für *freies* em. feld
  - Bewegungsgleichung für $\vec{A}$:

$$\Box \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{ masseloses Feld!}$$

  - führe Modenfunktionen ein:

$$\vec{u}_{\vec{p},j}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2|\vec{p}|}} \vec{\epsilon}_j(\vec{p}) \exp(-\mathrm{i}\underline{x} \cdot \underline{p})|_{p^0=E_p=|\vec{p}|}$$

Quantisierung der QED 1

- von Coulomb-Eichbedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\vec{p},j} = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_j(\vec{p}) = 0.$$

- Es gibt nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade
- wähle zu $\vec{p}$ zwei aufeinander senkrechte reelle Einheitsvektoren $\perp \vec{p}$, so dass

$$\vec{\epsilon}_1(\vec{p}) \times \vec{\epsilon}_2(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\epsilon}_3(\vec{p}) \Rightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{3} \vec{\epsilon}_j(\vec{p}) \vec{\epsilon}_j(\vec{p})^\dagger = \mathbb{1}_3 \Rightarrow \sum_{j=1}^{2} \vec{\epsilon}_j(\vec{p}) \vec{\epsilon}_j(\vec{p})^\dagger = \mathbb{1}_3 - \frac{1}{\vec{p}^2} \vec{p} \vec{p}^{\mathrm{T}} = \hat{P}_\perp(\vec{p}).$$

- entsprechen linear polarisierten ebenen Wellen
- masseloses Feld $\Rightarrow$ erfordert Eichtheorie
  $\Rightarrow$ für masseloses Vektorfeld nur 2 statt 3 „Spin-Freiheitsgrade“
- intrinsische Definition von Quantenzahlen: kein Ruhsystem für masselose Teilchen
- Wähle Drehimpulskomponente in Richtung von $\vec{p}$: Helizität

Quantisierung der QED 1

  - links- und rechts-drehende zirkular polarisierte Wellen

$$\vec{\epsilon}_{\mathrm{L/R}}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{\epsilon}_1(\vec{p}) \pm \mathrm{i}\vec{\epsilon}_2(\vec{p})]$$

  - L- (R=)polarisierte Wellen: $h = +1$ $(h = -1)$ ($\hat{=}$ Chiralität via Rechte-Hand-Regel)
- Quantisierung via Feynman-Stückelberg-Trick
- quantisiere bosonisch, also mit Kommutator-Relationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (Spin-Statistik-Theorem!)
  - klassische Felder reell $\Rightarrow$ Teilchen=Antiteilchen:

$$\vec{\mathbf{A}}(t,\vec{x}) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p} \left[\mathbf{a}_j \vec{u}_{\vec{p},j}(\underline{x}) + \mathbf{a}_j^\dagger \vec{u}^*_{\vec{p},j}(\underline{x})\right],$$

$$\left[\mathbf{a}_j(\vec{p}), \mathbf{a}_k(\vec{q})\right] = 0, \quad \left[\mathbf{a}_j(\vec{p}), \mathbf{a}_k^\dagger(\vec{q})\right] = \delta_{jk}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}).$$

- Energie- und Impuls

Quantisierung der QED 1

- Noether liefert kanonischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ mit $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$ aus zeitlicher und räumlicher Translationsinvarianz
- Problem: $\Theta^{\mu\nu}$ nicht eichinvariant
- Lösung: verwende Belinfante-Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ (vgl. Schluss von Vorl. 5)
- Resultiert in aus E-Dynamik bekannten Ausdrücken
- hier quantisierte Version (einschließlich Normalordnung, um divergierende Nullpunktsenergiebeiträge zu subtrahieren)
- Energiedichte ε und Impulsdichte $\vec{g}$ (ist in unseren natürlichen Einheiten mit $c = 1$ und Symmetrie zugleich Energiestromdichte $\vec{S}$)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2} : \left[\vec{\mathbf{E}}^2 + \vec{\mathbf{B}}^2 \right] :, \quad \vec{\mathbf{g}}(\underline{x}) = \vec{\mathbf{S}}(\underline{x}) =: \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} : .$$

mit

$$\vec{\mathbf{E}}(\underline{x}) = -\partial_t \vec{\mathbf{A}}(\underline{x}), \quad \vec{\mathbf{B}}(\underline{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}(\underline{x}).$$

Quantisierung der QED 1

- Modenentwicklung ergibt für Gesamt-Energie und -Impuls erwartungsgemäß

$$\mathbf{H} = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\, E_p\, \mathbf{N}_j(\vec{p}) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\, |\vec{p}| \mathbf{N}_j(\vec{p}), \quad \vec{\mathbf{P}} = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\, \vec{p}\, \mathbf{N}_j(\vec{p}).$$

- Gleichzeitige Feldkommutatorrelationen
  - $\vec{\Pi}(\underline{x}) = \vec{E}(\underline{x}) = -\partial_t \vec{A}(\underline{x})$ (s.o.) aber

$$\left[\mathbf{A}^j(t,\vec{x}), \mathbf{A}^k(t,\vec{y})\right] = 0$$

$$\left[\mathbf{\Pi}^j(t,\vec{x}), \mathbf{\Pi}^k(t,\vec{y})\right] = \left[\dot{\mathbf{A}}^j(t,\vec{x}), \dot{\mathbf{A}}^k(t,\vec{y})\right] = \left[\mathbf{E}^j(t,\vec{x}), \mathbf{E}^k(t,\vec{y})\right] = 0,$$

$$\left[\mathbf{A}^j(t,\vec{x}), \mathbf{\Pi}_k(t,\vec{x})\right] = -\left[\mathbf{A}^j(t,\vec{x}), \mathbf{E}^k(t,\vec{x})\right] = \mathrm{i}\delta^j_{\perp k}(\vec{x}-\vec{y})$$

mit

$$\delta^j_{\perp k}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p} \left(\delta^j_k - \frac{p^j p^k}{\vec{p}^2}\right) \exp(\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x})$$

Quantisierung der QED 1

- in $\vec{x}$:

$$\delta^j_{\parallel k}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p} \, \frac{p^j p^k}{\vec{p}^2} \exp(\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta\delta^j_{\parallel k}(\vec{x}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p} \, p^j p^k \exp(\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}) \\ &= +\frac{1}{(2\pi)^3} \partial_j \partial_k \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p} \exp(\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}) = +\partial_j\partial_k \delta^{(3)}(\vec{x}).\end{aligned}$$

- Green-Funktion von $-\Delta$ ist $1/(4\pi|\vec{x}|) \Rightarrow$

$$\delta^j_{\parallel k}(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}' \, \frac{\partial_j\partial_k\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} = \Delta^{-1}\partial_j\partial_k\delta^{(3)}(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$\delta^j_{\perp k}(\vec{x}) = \left(\delta_{kj} - \Delta^{-1}\partial_j\partial_k\right)\delta^{(3)}(\vec{x}).$$

Quantisierung der QED 1

- kompatibel mit Coulomb-Eichbedingungen, denn

$$\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t,\vec{x}), \Pi_k(t,\vec{x})\right] = \mathrm{i}\partial_j \delta^j_{\perp k}(\vec{x}-\vec{y}) = 0.$$

- aber anscheinend Mikrokausalität verletzt
- beobachtbare Größen müssen aber eichinvariant sein
- $\Rightarrow$ zusammengesetzt aus $\vec{E}$ und $\vec{B}$

$$\left[\mathbf{E}^j(t,\vec{x}), \mathbf{E}^k(t,\vec{y})\right] = \left[\mathbf{B}^j(t,\vec{x}), \mathbf{B}^k(t,\vec{y})\right] = 0,$$
$$\left[\mathbf{B}^j(t,\vec{x}), \mathbf{E}^k(t,\vec{y})\right] = \mathrm{i}\epsilon^{jka}\partial_a \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

Literatur

[BD64] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).

[Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), `https://doi.org/10.1142/9371`.

[Gre05] M. Greiter, Is electromagnetic gauge invariance spontaneously violated in superconductors?, Annals of Physics **319**, 217 (2005), `https://doi.org/10.1016/j.aop.2005.03.008`.

[Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002), `https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf`.

[Hee21] H. van Hees, Comment on “Defining the electromagnetic potentials”, Eur. J. Phys. **41**, 045202 (2021), `https://doi.org/10.1088/1361-6404/abc137`.

Literatur

[LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).

[SU76] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer-Verlag (1976).

[Wei95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1, Cambridge University Press (1995).