

Einführung in die theoretische Kern- und
Teilchenphysik
Vorlesung 8: Eichprinzip, QED-Lagrangian und
Quantisierung

Hendrik van Hees

Inhaltsverzeichnis

1 Eichung der globalen Phasensymmetrie und lokale Eichinvarianz	1
2 Quantisierung der QED 1 (freies em. Feld)	8
3 Literatur	13
1 Eichung der globalen Phasensymmetrie und lokale Eichinvarianz	

„Eichung“ der globalen
Phasensymmetrie

Literatur: [\[Col18, Wei95\]](#)

Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Motivation: **Prinzip zur Beschreibung von Wechselwirkungen**
- klassische Elektrodynamik: **Eichtheorie**
- moderner Standpunkt: Symmetrie des Dirac-Lagrangians unter **globalen Phasenänderungen** Symmetriegruppe $U(1)$
 - Noether-Theorem: (lokaler) **Ladungserhaltungssatz** $\partial_\mu j^\mu = 0$
 - in **klassischer Elektrodynamik**: A_μ nur modulo einer **Eichtransformation** bestimmt
 - für jedes Skalarfeld α beschreibt $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$ **dieselbe Physik** wie A_μ
 - bei der Eichtransformation handelt es sich also *nicht* um eine neue Symmetrie, da sie *nicht* zu einem neuen Zustand transformiert
 - stattdessen: **elektromagnetisches Feld** eindeutig durch \vec{E} und \vec{B} bestimmt, Potentiale, die sich um **Eichtransformation unterscheiden**, repräsentieren das gleiche Feld
 - **Darstellung als Eichfeld** erweist sich bei Analyse masseloser Spin-1-Teilchen als $(1/2, 1/2)$ -Darstellung der Lorentzgruppe $SO(1,3)^\dagger$ als notwendig
 - andernfalls hätte man masselose Teilchen mit **kontinuierlichen Polarisationsfreiheitsgraden** (nie in der Natur beobachtet!) [SU76, LL91, Hee02]
 - wichtig für Verständnis des Higgs-Mechanismus' (elektroschwache Wechselwirkung)
 - NB: der übliche „Slang“ der Teilchenphysiker ist oft verwirrend!
 - aus Sicht eines Festkörperphysikers (BCS-Theorie der Supraleitung) schön beschrieben in [Gre05]
- **Eichung der „Ladungs-U(1)-Transformation“**
 - freier Dirac-Lagrangian: soll jetzt **Elektronen und Positronen e^\mp** beschreiben $\Rightarrow q = -e$

$$\mathcal{L}_{e^-e^+}^{(0)} = \bar{\Psi}(\underline{x})(i\gamma - m)\Psi(\underline{x})$$

- $e > 0$: Elementarladung

- in unseren natürlichen Einheiten dimensionslos:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \hat{=} \frac{e_{\text{SI}}^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e_{\text{HL}}^2}{4\pi\hbar c} = \frac{e_{\text{Gauß}}^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,035999177(21)}$$

- will U(1)-Transformation „lokal“ machen:

$$\Psi'(\underline{x}) = \exp[-iq\alpha(\underline{x})]\Psi(\underline{x}), \quad \bar{\Psi}'(\underline{x}) = \exp[+iq\alpha(\underline{x})]\bar{\Psi}(\underline{x})$$

- Lagrangian *nicht* invariant unter dieser lokalen U(1)-Transformation
- Problem:

$$\partial_\mu \Psi'(\underline{x}) = \exp[-iq\alpha(\underline{x})] [\partial_\mu - iq\partial_\mu \alpha(\underline{x})] \Psi(\underline{x}).$$

- Lagrangian wird **invariant unter lokaler U(1)-Trafo**, wenn man ∂_μ durch **eichkovariante Ableitung D_μ** ersetzt:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(\underline{x})$$

mit Vektorfeld $A_\mu(\underline{x})$

- gibt Freiheit, dass A_μ auch unter lokaler U(1)-Transformation transformiert wird, und zwar so, dass

$$\begin{aligned} D'_\mu \Psi'(\underline{x}) &= [\partial_\mu + iqA'_\mu(\underline{x})] \Psi'(\underline{x}) \\ &= \exp[-iq\alpha(\underline{x})] [D'_\mu - iq\partial_\mu \alpha(\underline{x})] \Psi(\underline{x}) \\ &\stackrel{!}{=} \exp[-iq\alpha(\underline{x})] D_\mu \Psi(\underline{x}) \end{aligned}$$

- Trafo-Verhalten von A_μ :

$$A'_\mu(\underline{x}) - \partial_\mu \alpha(\underline{x}) = A_\mu(\underline{x}) \Rightarrow A'_\mu(\underline{x}) = A_\mu(\underline{x}) + \partial_\mu \alpha(\underline{x}).$$

- **Eichtransformation der klassischen E-Dynamik!**
- **unter lokalen U(1)-Trafos invarianter Lagrangian**
- Prinzip der **minimalen Substitution**: ersetze im Lagrangian, der unter **globalen U(1)-Trafos** invariant ist, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$:

$$\mathcal{L}_{e^-e^+} = \bar{\psi}(\underline{x})(i\not{D} - m)\psi(\underline{x})$$

- ist bis auf totale Viererdivergenz **reell**, wenn A_μ reell ist (dann **Wirkung** reell)
- jetzt ist Ψ kein freies Feld mehr, denn

$$\mathcal{L}_{e^-e^+} = \bar{\psi}(\underline{x}) [i\cancel{\partial} - m - qA_\mu(\underline{x})\gamma^\mu] \Psi(\underline{x}) = \mathcal{L}_{e^-e^+}^{(0)} \underbrace{-A_\mu(\underline{x})j^\mu(\underline{x})}_{\mathcal{L}_1}, \quad j^\mu(\underline{x}) = q\bar{\psi}(\underline{x})\gamma^\mu\psi(\underline{x}).$$

- $\mathcal{L}_{e^-e^+}^{(0)}$: Lagrangian für **freies Dirac-Feld** (quadratisch in Feldkomponenten)
- \mathcal{L}_1 : Wechselwirkung zwischen Ladung und **elektromagnetischem Feld!**
- es fehlt nur noch der „**kinetische Term**“ für das **elektromagnetische Feld**
- aus klassischer E-Dynamik bekannt
(und einziger eichinvarianter quadratischer Term, mit nur 1. Ableitungen der A_μ !)

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\underline{x})F^{\mu\nu}(\underline{x}), \quad F_{\mu\nu}(\underline{x}) = \partial_\mu A_\nu(\underline{x}) - \partial_\nu A_\mu(\underline{x})$$

- γ : **Photon** $\hat{=}$ elementare Anregung des elektromagnetischen Feldes in der quantisierten Theorie (s.u.)
- NB: **Teilcheninterpretation** noch weniger adäquat als für massive Teilchen!
- **neuer Lagrangian**

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \underbrace{\bar{\Psi}(\underline{x})(i\cancel{\partial} - m)\Psi(\underline{x}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\underline{x})F^{\mu\nu}(\underline{x})}_{\mathcal{L}_{\text{QED}}^{(0)}} \underbrace{- qA_\mu(\underline{x})\bar{\Psi}(\underline{x})\gamma^\mu\Psi(\underline{x})}_{\mathcal{L}_1}.$$

- NB: quantisierte Theorie kann nicht mehr geschlossen gelöst werden \Rightarrow **Störungstheorie**
- (formale) Entwicklung nach Potenzen von e resp. $\alpha \Rightarrow$ **Feynman-Diagramme**

• **Bewegungsgleichungen und Interpretation**

- Wirkung: $V^{(4)} = (t_1, t_2) \times \mathbb{R}^3$

$$S[\underline{A}, \Psi, \bar{\Psi}] = \int_{V^{(4)}} d^4\underline{x} \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - A_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \right]$$

- **Gleichungen für das elektromagnetische Feld:** variiere A^μ

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} \left[-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \delta A_\nu \bar{\Psi} \gamma^\nu \psi \right] \\ &= \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} \left[-F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - \delta A_\nu \bar{\Psi} \gamma^\nu \psi \right] \\ &= \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} \delta A_\nu \left[+\partial_\mu F^{\mu\nu} - \bar{\Psi} \gamma^\nu \psi \right] \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

- soll für alle δA_ν gelten: \Rightarrow

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi = j^\nu \quad (1)$$

- inhomogene Maxwell-Gleichungen, denn

$$\begin{aligned}\partial_n F^{0n} &= \partial_n (\partial^0 A^n - \partial^n A^0) = \partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} A^0 = -\vec{E}, \\ F^{mn} &= \partial^m A^n - \partial^n A^m = \partial_n A^m - \partial_\mu A^n = -\epsilon^{mna} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a = -\epsilon^{mna} B^a, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.\end{aligned}$$

- \Rightarrow **homogene Maxwell-Gleichungen** automatisch erfüllt:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} A^0) + \partial_t \vec{B} = -\partial_t \vec{B} + \partial_t \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.\end{aligned}$$

- \Rightarrow Feldgleichungen in Dreierschreibweise:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= +\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{(1)}{=} j^0 = \rho, \\ \partial_n \partial_\mu F^{\mu n} &= \partial_n [\partial_t^2 A^n - \partial^n \partial_t A^0 + \partial_m (\partial^m A^n - \partial^n \partial_m A^m)] \\ &= \partial_t^2 \vec{A} + \vec{\nabla} A^0 - \Delta \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ &= \partial_t (\partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} A^0) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} \stackrel{(1)}{=} \vec{j}.\end{aligned}$$

\Rightarrow **inhomogene Maxwell-Gleichungen**

- Gleichung für Ψ : **Dirac-Gleichung für e^- und e^+ in Wechselwirkung mit em. Feld**

- variiere $\bar{\Psi}$

$$\delta S = \int_{V^{(4)}} d^4 \underline{x} \delta \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m - A) \Psi.$$

- \Rightarrow Dirac-Gleichung für geladenes Teilchen in em. Feld

$$(i\partial - m - \hat{A})\Psi = 0.$$

- Zur Interpretation: nichtrelativistischer Grenzfall [BD64]

- Idee: sollte Pauli-Gleichung für ein Elektron im äußeren em. Feld erhalten (also Schrödinger-Wellenmechanik für Teilchen mit Spin 1/2)
- niedrige Wechselwirkungsenergien mit dem em. Feld \Rightarrow Positronen werden nicht erzeugt
- \Rightarrow „erstquantisierte“ nichtrelativistische Wellengleichung für Spin-1/2-Elektron
- einfacher zu finden in der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^j = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^j \\ -\hat{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\tilde{\gamma}^0$ diagonal: obere (untere) zwei Spinor-Komponenten Eigenwert 1 (-1) \Rightarrow repräsentieren Teilchen (Antiteilchen)
- gewöhnliche Spinoren wie in nichtrelativistischer Quantentheorie
- nichtrelativistischer Grenzfall: typische Impulse $|\vec{p}| \ll m$. Dann

$$E_p \simeq m + \frac{1}{2m} \vec{p}^2.$$

- Schreibe Dirac-Gleichung in „Schrödinger-artiger“ Form

$$\tilde{\gamma}^0 i\partial_t \tilde{\Psi} = [-i\vec{\tilde{\gamma}} \cdot \vec{\nabla} + m + qA_0 \tilde{\gamma}^0 - q\vec{A} \cdot \vec{\tilde{\gamma}}] \tilde{\Psi}.$$

- multipliziere von links mit $\tilde{\gamma}^0$:

$$i\partial_t \tilde{\Psi} = [-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\gamma^0 + qA_0 - q\vec{\alpha} \cdot \vec{A}] \tilde{\Psi},$$

$$\vec{\alpha} = \tilde{\gamma}^0 \vec{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Operator auf der rechten Seite $\hat{=}$ Hamilton-Operator
- jetzt nicht-relativistische Näherung für Elektronen (obere beide Komponenten):

$$\tilde{\Psi} = \exp(-im t) \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} = \vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) \begin{pmatrix} \psi_{e^+} \\ \psi_{e^-} \end{pmatrix} + qA_0 \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix}$$

- nichtrelativistische Näherung $E \sim i\partial_t \ll m$, $\vec{p} \sim -i\vec{\nabla} \ll m$, $q\vec{A} \ll m$, $qA^0 \ll m$
- \Rightarrow untere Komponenten der Gleichung können genähert werden durch

$$\psi_{e^+} = \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) \psi_{e^-}$$

- damit in obere Komponenten der Gl.

$$i\partial_t \psi_{e^-} = \left\{ \frac{1}{2m} [\vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})]^2 + qA^0 \right\} \psi_{e^-}$$

- werte „kinetischen Term“ aus
(verwende $\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk}$ und $[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\epsilon^{jkl}\sigma^l$, $\hat{s} = \vec{\sigma}/2$) \Rightarrow
Pauli-Gleichung:

$$i\partial_t \psi_{e^-} = \frac{1}{2m} [(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 - 2q\hat{s} \cdot \vec{B} + qA^0] \psi_{e^-} = \hat{H} \psi_{e^-}$$

- \hat{H} enthält **kinetischen Term**

$$\hat{H}_{\text{kin}} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - q\vec{A})^2 = \frac{m}{2} \hat{v}^2$$

- NB: $\hat{p} = -i\vec{\nabla}$ repräsentiert **kanonischen Impuls**
- Teilchen im Magnetfeld: kinetischer Impuls $\vec{p}_{\text{kin}} = m\vec{v} = \vec{p}_{\text{kan}} - q\vec{A}$
- **Wechselwirkungspotential für magnetischen Dipol**

$$V_{\text{dip}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

- \Rightarrow **Operator für magnetischen Dipol des Elektrons**

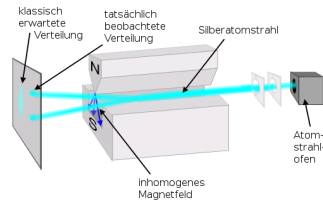
$$\hat{\mu} = \frac{q}{2m} g_s \hat{s}, \quad g_s = 2$$

- zum Vergleich: **Dipolmoment einer klassischen Stromverteilung:**

$$\vec{\mu}_{\text{kl}} = \frac{q}{2m} \vec{x} \times \vec{p} = \frac{q}{2m} g_{\text{Bahn}} \vec{L}, \quad g_{\text{Bahn}} = 1$$

- kommt auch quantenmechanisch heraus, wenn man Pauli-Gleichung in Kugelkoordinaten ausarbeitet
- Gyro-Faktor $g_s = 2$ wurde *vor der Entdeckung der modernen Quantentheorie* von **A. Landé** empirisch durch Analyse des **anomalen Zeeman-Effekts** gefunden

- Stern-Gerlach-Experiment (1922 an der Uni Frankfurt!)



$$\mu_{e^-} = \frac{q}{2m} \hbar = \mu_B, \quad q = -e$$

- wurde als Erfolg des Bohr-Sommerfeld-Modells fehlinterpretiert
- heute: Spin 1/2 und Landé-Faktor 2 \Rightarrow 1 Bohrsches Magneton!
- Erklärung von $g_s = 2$ galt als ein Triumph der Dirac-Gleichung
- der andere war die Vorhersage des Positrons als Antiteilchen des Elektrons
(im Rahmen der Löchertheorie)

2 Quantisierung der QED 1 (freies em. Feld)

Quantisierung der QED

Literatur: [Col18, Wei95, LL91]

Quantisierung der QED 1

- Versuch kanonischer Feldquantisierung

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma^{(0)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

- kanonisch konjugierte Feldimpulse

$$\Pi_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0, \quad \Pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^j} = -\vec{E}^j, \quad \underline{\Pi} = e_\mu \Pi^\mu = e_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ +\vec{E} \end{pmatrix}$$

- naive kanonische Quantisierung unmöglich, da man offensichtlich die gleichzeitige Kommutatorrelation $[\Pi_0(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ nicht fordern kann
- verschiedene Lösungen: hier **Quantisierung in Coulomb-Eichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

- Nachteil: **nicht manifest Poincaré-kovariant!**
- lege erst auf **klassischer Ebene** durch Forderung von **Eichfixierungsbedingungen** Potential A^μ vollständig fest
- rechne zunächst mit erhaltenem Viererstrom

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

- **Coulomb-Eichung**

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} A^0, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} (\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}) - \Delta \vec{A} + (\partial_t^2 \vec{A} + \partial_t \vec{\nabla} A^0) = \vec{j}$$

$$\Rightarrow \square \vec{A} = \vec{j} - \partial_t \vec{\nabla} A^0 = \vec{j}_\perp$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \Rightarrow -\cancel{\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{A}} - \Delta A^0 = \rho \Rightarrow -\Delta A^0 = \rho.$$

- in Coulomb-Eichung Problem mit $\Pi^0 = 0$ gelöst $\Rightarrow A^0$ ist kein dynamischer Freiheitsgrad
- wird ersetzt durch „**instantanes Coulomb-Potential**“

$$A^0(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\rho(t, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- in Maxwell-Ampère-Gesetz

$$\begin{aligned}\square \vec{A} = \vec{j}_\perp = \vec{j} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\vec{\nabla}' \partial_t \rho(t, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} &= \vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \partial_t \rho(t, \vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \vec{j} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \partial_t \rho(t, \vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(t, \vec{x}')] \vec{\nabla}' \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}\end{aligned}$$

- Konsistenz mit Coulomb-Eichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \square \vec{A} = \square \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\perp = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(t, \vec{x}')] \underbrace{\Delta \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}}_{-4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')} = 0 \quad (:\cdot))$$

- NB: Lösung scheint „nicht kausal“ zu sein
- aber löst man Wellengleichung für \vec{A} mit **retardiertem Propagator** (klassische Theorie!), erhält man retardierte Lösungen für \vec{E} und \vec{B}

[Hee21]

- **Potentiale nicht beobachtbar!**

- **Quantisierung des freien em. Feldes**

- setze wieder $\underline{j} = 0 \Rightarrow$ und verwende \underline{A} der **Coulomb-Eichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \stackrel{\rho=0}{\Rightarrow} A^0 = 0.$$

- „**Strahlungseichung**“ für *freies* em. feld
- Bewegungsgleichung für \vec{A} :

$$\square \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{masseloses Feld!}$$

- führe Modenfunktionen ein:

$$\vec{u}_{\vec{p},j}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2|\vec{p}|}} \vec{e}_j(\vec{p}) \exp(-i\underline{x} \cdot \underline{p})|_{p^0=E_p=|\vec{p}|}$$

- von **Coulomb-Eichbedingung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\vec{p},j} = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{e}_j(\vec{p}) = 0.$$

- Es gibt **nur zwei Polarisationsfreiheitsgrade**

- wähle zu \vec{p} zwei aufeinander senkrechte reelle Einheitsvektoren $\perp \vec{p}$, so dass

$$\vec{e}_1(\vec{p}) \times \vec{e}_2(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{e}_3(\vec{p}) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^3 \vec{e}_j(\vec{p}) \vec{e}_j(\vec{p})^\dagger = \mathbb{1}_3 \Rightarrow \sum_{j=1}^2 \vec{e}_j(\vec{p}) \vec{e}_j(\vec{p})^\dagger = \mathbb{1}_3 - \frac{1}{\vec{p}^2} \vec{p} \vec{p}^T = \hat{P}_\perp(\vec{p}).$$

- entsprechen **linear polarisierten ebenen Wellen**
- masseloses Feld \Rightarrow erfordert Eichtheorie
 \Rightarrow für masseloses Vektorfeld **nur 2 statt 3 „Spin-Freiheitsgrade“**
- intrinsische Definition von Quantenzahlen: **kein Ruhssystem für masselose Teilchen**
- Wähle Drehimpulskomponente in Richtung von \vec{p} : **Helizität**
- **links- und rechts-drehende zirkular** polarisierte Wellen

$$\vec{e}_{L/R}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{e}_1(\vec{p}) \pm i \vec{e}_2(\vec{p})]$$

- L- (R=)polarisierte Wellen: $h = +1$ ($h = -1$) ($\hat{=}$ Chiralität via Rechte-Hand-Regel)

- **Quantisierung via Feynman-Stückelberg-Trick**
- quantisiere **bosonisch**, also mit **Kommutator-Relationen** für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (Spin-Statistik-Theorem!)
 - klassische Felder reell \Rightarrow Teilchen=Antiteilchen:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \left[\mathbf{a}_j \vec{u}_{\vec{p},j}(\underline{x}) + \mathbf{a}_j^\dagger \vec{u}_{\vec{p},j}^*(\underline{x}) \right],$$

$$[\mathbf{a}_j(\vec{p}), \mathbf{a}_k(\vec{q})] = 0, \quad [\mathbf{a}_j(\vec{p}), \mathbf{a}_k^\dagger(\vec{q})] = \delta_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}).$$

- **Energie- und Impuls**
 - Noether liefert **kanonischen Energie-Impuls-Tensor** $\Theta^{\mu\nu}$ mit $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$ aus zeitlicher und räumlicher Translationsinvarianz
 - Problem: $\Theta^{\mu\nu}$ **nicht eichinvariant**
 - Lösung: verwende **Belinfante-Energie-Impuls-Tensor** $T^{\mu\nu}$ (vgl. Schluss von Vorl. 5)

- **Resultiert in aus E-Dynamik bekannten Ausdrücken**
- hier quantisierte Version (einschließlich Normalordnung, um divergierende Nullpunktsenergiebeiträge zu subtrahieren)
- Energiedichte ε und Impulsdichte \vec{g} (ist in unseren natürlichen Einheiten mit $c = 1$ und Symmetrie zugleich Energiestromdichte \vec{S})

$$\varepsilon(\underline{x}) = \frac{1}{2} : [\vec{\mathbf{E}}^2 + \vec{\mathbf{B}}^2] :, \quad \vec{g}(\underline{x}) = \vec{\mathbf{S}}(\underline{x}) =: \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} : .$$

mit

$$\vec{\mathbf{E}}(\underline{x}) = -\partial_t \vec{\mathbf{A}}(\underline{x}), \quad \vec{\mathbf{B}}(\underline{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}(\underline{x}).$$

- Modenentwicklung ergibt für Gesamt-Energie und -Impuls erwartungsgemäß

$$\mathbf{H} = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} E_p \mathbf{N}_j(\vec{p}) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} |\vec{p}| \mathbf{N}_j(\vec{p}), \quad \vec{\mathbf{P}} = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \vec{p} \mathbf{N}_j(\vec{p}).$$

- **Gleichzeitige Feldkommutatorrelationen**

- $\vec{\Pi}(\underline{x}) = \vec{E}(\underline{x}) = -\partial_t \vec{A}(\underline{x})$ (s.o.) **aber**

$$[\mathbf{A}^j(t, \vec{x}), \mathbf{A}^k(t, \vec{y})] = 0$$

$$[\mathbf{\Pi}^j(t, \vec{x}), \mathbf{\Pi}^k(t, \vec{y})] = [\dot{\mathbf{A}}^j(t, \vec{x}), \dot{\mathbf{A}}^k(t, \vec{y})] = [\mathbf{E}^j(t, \vec{x}), \mathbf{E}^k(t, \vec{y})] = 0,$$

$$[\mathbf{A}^j(t, \vec{x}), \mathbf{\Pi}_k(t, \vec{x})] = -[\mathbf{A}^j(t, \vec{x}), \mathbf{E}^k(t, \vec{x})] = i\delta_{\perp k}^j(\vec{x} - \vec{y})$$

mit

$$\delta_{\perp k}^j(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \left(\delta_k^j - \frac{p^j p^k}{\vec{p}^2} \right) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

- in \vec{x} :

$$\delta_{\parallel k}^j(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \frac{p^j p^k}{\vec{p}^2} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta_{\parallel k}^j(\vec{x}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} p^j p^k \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \\ &= +\frac{1}{(2\pi)^3} \partial_j \partial_k \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{p} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) = +\partial_j \partial_k \delta^{(3)}(\vec{x}). \end{aligned}$$

- Green-Funktion von $-\Delta$ ist $1/(4\pi|\vec{x}|) \Rightarrow$

$$\delta_{\parallel k}^j(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\partial_j \partial_k \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} = \Delta^{-1} \partial_j \partial_k \delta^{(3)}(\vec{x}) \Rightarrow$$

$$\delta_{\perp k}^j(\vec{x}) = (\delta_{kj} - \Delta^{-1} \partial_j \partial_k) \delta^{(3)}(\vec{x}).$$

- kompatibel mit Coulomb-Eichbedingungen, denn

$$[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}), \Pi_k(t, \vec{x})] = i \partial_j \delta_{\perp k}^j(\vec{x} - \vec{y}) = 0.$$

- aber anscheinend **Mikrokausalität verletzt**
- beobachtbare Größen müssen aber **eichinvariant** sein
- \Rightarrow zusammengesetzt aus \vec{E} und \vec{B}

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}^j(t, \vec{x}), \mathbf{E}^k(t, \vec{y})] &= [\mathbf{B}^j(t, \vec{x}), \mathbf{B}^k(t, \vec{y})] = 0, \\ [\mathbf{B}^j(t, \vec{x}), \mathbf{E}^k(t, \vec{y})] &= i \epsilon^{jka} \partial_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

3 Literatur

Literatur

Literatur

- [BD64] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).
- [Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), <https://doi.org/10.1142/9371>.
- [Gre05] M. Greiter, Is electromagnetic gauge invariance spontaneously violated in superconductors?, *Annals of Physics* **319**, 217 (2005), <https://doi.org/10.1016/j.aop.2005.03.008>.
- [Hee02] H. van Hees, *Introduction to Quantum Field Theory* (2002), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf>.
- [Hee21] H. van Hees, Comment on “Defining the electromagnetic potentials”, *Eur. J. Phys.* **41**, 045202 (2021), <https://doi.org/10.1088/1361-6404/abc137>.
- [LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).
- [SU76] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer-Verlag (1976).

[Wei95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1, Cambridge University Press (1995).