

# Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

## Vorlesung 8: Eichprinzip, QED-Lagrangian und Quantisierung

Hendrik van Hees

### Inhaltsverzeichnis

1	Eichung der globalen Phasensymmetrie und lokale Eichinvarianz	1
2	Quantisierung der QED 1 (freies em. Feld)	8
3	Literatur	13

### 1 Eichung der globalen Phasensymmetrie und lokale Eichinvarianz

„Eichung“ der globalen  
Phasensymmetrie

Literatur: [Col18, Wei95]

## Eichung der globalen Phasensymmetrie

- Motivation: Prinzip zur Beschreibung von Wechselwirkungen
- klassische Elektrodynamik: Eichtheorie
- moderner Standpunkt: Symmetrie des Dirac-Lagrangians unter globalen Phasenänderungen Symmetriegruppe U(1)
  - Noether-Theorem: (lokaler) Ladungserhaltungssatz  $\partial_\mu j^\mu = 0$
  - in klassischer Elektrodynamik:  $A_\mu$  nur modulo einer Eichtransformationen bestimmt
  - für jedes Skalarfeld  $\alpha$  beschreibt  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$  dieselbe Physik wie  $A_\mu$
  - bei der Eichtransformation handelt es sich also *nicht* um eine neue Symmetrie, da sie *nicht* zu einem neuen Zustand transformiert
  - stattdessen: elektromagnetisches Feld eindeutig durch  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bestimmt, Potentiale, die sich um Eichtransformation unterscheiden, repräsentieren das gleiche Feld
  - Darstellung als Eichfeld erweist sich bei Analyse masseloser Spin-1-Teilchen als  $(1/2, 1/2)$ -Darstellung der Lorentzgruppe  $\text{SO}(1, 3)^\dagger$  als notwendig
  - andernfalls hätte man masselose Teilchen mit kontinuierlichen Polarisationsfreiheitsgraden (nie in der Natur beobachtet!) [SU76, LL91, Hee02]
  - wichtig für Verständnis des Higgs-Mechanismus' (elektroschwache Wechselwirkung)
  - NB: der übliche „Slang“ der Teilchenphysiker ist oft verwirrend!
  - aus Sicht eines Festkörperphysikers (BCS-Theorie der Supraleitung) schön beschrieben in [Gre05]
- Eichung der „Ladungs-U(1)-Transformation“
  - freier Dirac-Lagrangian: soll jetzt Elektronen und Positronen  $e^\mp$  beschreiben  $\Rightarrow q = -e$ 
$$\mathcal{L}_{e^- e^+}^{(0)} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma - m)\Psi(x)$$
  - $e > 0$ : Elementarladung

- in unseren natürlichen Einheiten dimensionslos:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \hat{=} \frac{e_{\text{SI}}^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e_{\text{HL}}^2}{4\pi\hbar c} = \frac{e_{\text{Gauß}}^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,035\,999\,177(21)}$$

- will U(1)-Transformation „**lokal**“ machen:

$$\Psi'(\underline{x}) = \exp[-iq\alpha(\underline{x})]\Psi(\underline{x}), \quad \bar{\Psi}'(\underline{x}) = \exp[+iq\alpha(\underline{x})]\bar{\Psi}(\underline{x})$$

- Lagrangian *nicht* invariant unter dieser lokalen U(1)-Transformation
- Problem:

$$\partial_\mu \Psi'(\underline{x}) = \exp[-iq\alpha(\underline{x})] [\partial_\mu - iq\partial_\mu \alpha(\underline{x})] \Psi(\underline{x}).$$

- Lagrangian wird **invariant unter lokaler U(1)-Trafo**, wenn man  $\partial_\mu$  durch **eichkovariante Ableitung**  $D_\mu$  ersetzt:

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(\underline{x})$$

mit Vektorfeld  $A_\mu(\underline{x})$

- gibt Freiheit, dass  $A_\mu$  auch unter lokaler U(1)-Transformation transformiert wird, und zwar so, dass

$$\begin{aligned} D'_\mu \Psi'(\underline{x}) &= [\partial_\mu + iqA'_\mu(\underline{x})] \Psi'(\underline{x}) \\ &= \exp[-iq\alpha(\underline{x})] [D'_\mu - iq\partial_\mu \alpha(\underline{x})] \Psi(\underline{x}) \\ &\stackrel{!}{=} \exp[-iq\alpha(\underline{x})] D_\mu \Psi(\underline{x}) \end{aligned}$$

- Trafo-Verhalten von  $A_\mu$ :

$$A'_\mu(\underline{x}) - \partial_\mu \alpha(\underline{x}) = A_\mu(\underline{x}) \Rightarrow A'_\mu(\underline{x}) = A_\mu(\underline{x}) + \partial_\mu \alpha(\underline{x}).$$

- **Eichtransformation der klassischen E-Dynamik!**
- **unter lokalen U(1)-Trafos invariante Lagrangian**
- Prinzip der **minimalen Substitution**: ersetze im Lagrangian, der unter **globalen U(1)-Trafos** invariant ist,  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ :

$$\mathcal{L}_{e^-e^+} = \bar{\psi}(\underline{x})(i\cancel{D} - m)\psi(\underline{x})$$

- ist bis auf totale Viererdivergenz **reell**, wenn  $A_\mu$  reell ist (dann **Wirkung** reell)
- jetzt ist  $\Psi$  kein freies Feld mehr, denn

$$\mathcal{L}_{e^-e^+} = \bar{\psi}(\underline{x}) [i\cancel{d} - m - qA_\mu(\underline{x})\gamma^\mu] \Psi(\underline{x}) = \mathcal{L}_{e^-e^+}^{(0)} \underbrace{-A_\mu(\underline{x})j^\mu(\underline{x})}_{\mathcal{L}_I}, \quad j^\mu(\underline{x}) = q\bar{\psi}(\underline{x})\gamma^\mu\psi(\underline{x}).$$

- $\mathcal{L}_{e^-e^+}^{(0)}$ : Lagrangian für **freies Dirac-Feld** (quadratisch in Feldkomponenten)
- $\mathcal{L}_I$ : Wechselwirkung zwischen Ladung und **elektromagnetischem Feld!**
- es fehlt nur noch der „**kinetische Term**“ für das **elektromagnetische Feld**
- aus klassischer E-Dynamik bekannt  
(und einziger eichinvariante quadratischer Term, mit nur 1. Ableitungen der  $A_\mu$ !)

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\underline{x})F^{\mu\nu}(\underline{x}), \quad F_{\mu\nu}(\underline{x}) = \partial_\mu A_\nu(\underline{x}) - \partial_\nu A_\mu(\underline{x})$$

- $\gamma$ : **Photon**  $\hat{=}$  elementare Anregung des elektromagnetischen Feldes in der quantisierten Theorie (s.u.)
- NB: **Teilcheninterpretation** noch weniger adäquat als für massive Teilchen!
- **neuer Lagrangian**

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\bar{\Psi}(\underline{x})(i\cancel{d} - m)\Psi(\underline{x})}_{\mathcal{L}_{QED}^{(0)}} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\underline{x})F^{\mu\nu}(\underline{x})}_{\mathcal{L}_I} - \underbrace{qA_\mu(\underline{x})\bar{\Psi}(\underline{x})\gamma^\mu\Psi(\underline{x})}_{\mathcal{L}_I}.$$

- NB: quantisierte Theorie kann nicht mehr geschlossen gelöst werden  $\Rightarrow$  **Störungstheorie**
- (formale) Entwicklung nach Potenzen von  $e$  resp.  $\alpha$   $\Rightarrow$  **Feynman-Diagramme**

- **Bewegungsgleichungen und Interpretation**

- Wirkung:  $V^{(4)} = (t_1, t_2) \times \mathbb{R}^3$

$$S[\underline{A}, \Psi, \bar{\Psi}] = \int_{V^{(4)}} d^4x \left[ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - A_\nu\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi \right]$$

- Gleichungen für das elektromagnetische Feld: variiere  $A^\mu$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{V^{(4)}} d^4x \left[ -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \delta A_\nu \bar{\Psi} \gamma^\nu \psi \right] \\ &= \int_{V^{(4)}} d^4x \left[ -F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - \delta A_\nu \bar{\Psi} \gamma^\nu \psi \right] \\ &= \int_{V^{(4)}} d^4x \delta A_\nu \left[ +\partial_\mu F^{\mu\nu} - \bar{\Psi} \gamma^\nu \psi \right] \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

- soll für alle  $\delta A_\nu$  gelten:  $\Rightarrow$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi = j^\nu \quad (1)$$

- inhomogene Maxwell-Gleichungen, denn

$$\begin{aligned}\vec{e}_n F^{0n} &= \vec{e}_n (\partial^0 A^n - \partial^n A^0) = \partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} A^0 = -\vec{E}, \\ F^{mn} &= \partial^m A^n - \partial^n A^m = \partial_n A^m - \partial_m A^n = -\epsilon^{mna} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a = -\epsilon^{mna} B^a, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$  homogene Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} A^0) + \partial_t \vec{B} = -\partial_t \vec{B} + \partial_t \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$  Feldgleichungen in Dreierschreibweise:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= +\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{(1)}{=} j^0 = \rho, \\ \vec{e}_n \partial_\mu F^{\mu n} &= \vec{e}_n \left[ \partial_t^2 A^n - \partial^n \partial_t A^0 + \partial_m (\partial^m A^n - \partial^n \partial_m A^m) \right] \\ &= \partial_t^2 \vec{A} + \vec{\nabla} A^0 - \Delta \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ &= \partial_t (\partial_t \vec{A} + \vec{\nabla} A^0) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} \stackrel{(1)}{=} \vec{j}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  inhomogene Maxwell-Gleichungen

- Gleichung für  $\Psi$ : Dirac-Gleichung für  $e^-$  und  $e^+$  in Wechselwirkung mit em. Feld

- variiere  $\bar{\Psi}$

$$\delta S = \int_{V^{(4)}} d^4x \delta \bar{\Psi} (i\cancel{d} - m - \cancel{A}) \Psi.$$

- $\Rightarrow$  Dirac-Gleichung für geladenes Teilchen in em. Feld

$$(i\cancel{d} - m - \cancel{A})\Psi = 0.$$

- Zur Interpretation: nichtrelativistischer Grenzfall [BD64]

- Idee: sollte Pauli-Gleichung für ein Elektron im äußeren em. Feld erhalten (also Schrödinger-Wellenmechanik für Teilchen mit Spin 1/2)
- niedrige Wechselwirkungsenergien mit dem em. Feld  $\Rightarrow$  Positronen werden nicht erzeugt
- $\Rightarrow$  „erstquantisierte“ nichtrelativistische Wellengleichung für Spin-1/2-Elektron
- einfacher zu finden in der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^j = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^j \\ -\hat{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\tilde{\gamma}^0$  diagonal: obere (untere) zwei Spinor-Komponenten Eigenwert 1 (-1)  $\Rightarrow$  repräsentieren Teilchen (Antiteilchen)
- gewöhnliche Spinoren wie in nichtrelativistischer Quantentheorie
- nichtrelativistischer Grenzfall: typische Impulse  $|\vec{p}| \ll m$ . Dann

$$E_p \simeq m + \frac{1}{2m}\vec{p}^2.$$

- Schreibe Dirac-Gleichung in „Schrödinger-artiger“ Form

$$i\partial_t \tilde{\Psi} = [-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m + qA_0 \tilde{\gamma}^0 - q\vec{A} \cdot \vec{\gamma}] \tilde{\Psi}.$$

- multipliziere von links mit  $\tilde{\gamma}^0$ :

$$i\partial_t \tilde{\Psi} = [-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m\gamma^0 + qA_0 - q\vec{\alpha} \cdot \vec{A}] \tilde{\Psi},$$

$$\vec{\alpha} = \tilde{\gamma}^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Operator auf der rechten Seite  $\hat{=}$  Hamilton-Operator
- jetzt nicht-relativistische Näherung für Elektronen (obere beide Komponenten):

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \exp(-imt) \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ i\partial_t \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} &= \vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) \begin{pmatrix} \psi_{e^+} \\ \psi_{e^-} \end{pmatrix} + qA^0 \begin{pmatrix} \psi_{e^-} \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{e^+} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- nichtrelativistische Näherung  $E \sim i\partial_t \ll m$ ,  $\vec{p} \sim -i\vec{\nabla} \ll m$ ,  $q\vec{A} \ll m$ ,  $qA^0 \ll m$
- $\Rightarrow$  untere Komponenten der Gleichung können genähert werden durch

$$\psi_{e^+} = \frac{1}{2m} \vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) \psi_{e^-}$$

- damit in obere Komponenten der Gl.

$$i\partial_t \psi_{e^-} = \left\{ \frac{1}{2m} [\vec{\sigma} \cdot (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})]^2 + qA^0 \right\} \psi_{e^-}$$

- werte „kinetischen Term“ aus  
(verwende  $\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta^{jk}$  und  $[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\epsilon^{jkl}\sigma^l$ ,  $\hat{s} = \vec{\sigma}/2$ )  $\Rightarrow$  **Pauli-Gleichung:**

$$i\partial_t \psi_{e^-} = \frac{1}{2m} [(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 - 2q\hat{s} \cdot \vec{B} + qA^0] \psi_{e^-} = \hat{H} \psi_{e^-}$$

- $\hat{H}$  enthält **kinetischen Term**

$$\hat{H}_{\text{kin}} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2 = \frac{m}{2} \hat{\vec{v}}^2$$

- NB:  $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$  repräsentiert **kanonischen Impuls**
- Teilchen im Magnetfeld: kinetischer Impuls  $\vec{p}_{\text{kin}} = m\vec{v} = \vec{p}_{\text{kan}} - q\vec{A}$
- **Wechselwirkungspotential für magnetischen Dipol**

$$V_{\text{dip}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

- $\Rightarrow$  **Operator für magnetischen Dipol des Elektrons**

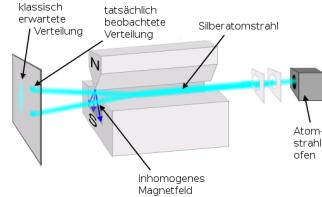
$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{q}{2m} g_s \hat{\vec{s}}, \quad g_s = 2$$

- zum Vergleich: **Dipolmoment einer klassischen Stromverteilung:**

$$\vec{\mu}_{\text{kl}} = \frac{q}{2m} \vec{x} \times \vec{p} = \frac{q}{2m} g_{\text{Bahn}} \vec{L}, \quad g_{\text{Bahn}} = 1$$

- kommt auch quantenmechanisch heraus, wenn man Pauli-Gleichung in Kugelkoordinaten ausarbeitet
- Gyro-Faktor  $g_s = 2$  wurde *vor der Entdeckung der modernen Quantentheorie von A. Landé* empirisch durch Analyse des **anomalen Zeeman-Effekts** gefunden

- Stern-Gerlach-Experiment (1922 an der Uni Frankfurt!)



$$\mu_{e^-} = \frac{q}{2m} \hbar = \mu_B, \quad q = -e$$

- wurde als Erfolg des Bohr-Sommerfeld-Modells fehlinterpretiert
- heute: Spin 1/2 und Landé-Faktor 2  $\Rightarrow$  1 Bohrsches Magneton!
- Erklärung von  $g_s = 2$  galt als ein Triumph der Dirac-Gleichung
- der andere war die Vorhersage des Positrons als Antiteilchen des Elektrons  
(im Rahmen der Löchertheorie)

## 2 Quantisierung der QED 1 (freies em. Feld)

# Quantisierung der QED

Literatur: [Col18, Wei95, LL91]

## Quantisierung der QED 1

- Versuch kanonischer Feldquantisierung

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma^{(0)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

- kanonisch konjugierte Feldimpulse

$$\Pi_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^0} = 0, \quad \Pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^j} = -\vec{E}^j, \quad \underline{\Pi} = \underline{e}_\mu \Pi^\mu = \underline{e}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ +\vec{E} \end{pmatrix}$$

- naive kanonische Quantisierung unmöglich, da man offensichtlich die gleichzeitige Kommutatorrelation  $[\Pi_0(t, \vec{x}), A^0(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$  nicht fordern kann
- verschiedene Lösungen: hier Quantisierung in Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

- Nachteil: nicht manifest Poincaré-kovariant!
- lege erst auf klassischer Ebene durch Forderung von Eichfixierungsbedingungen Potential  $A^\mu$  vollständig fest
- rechne zunächst mit erhaltenem Viererstrom

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

- Coulomb-Eichung

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} A^0, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} + (\partial_t^2 \vec{A} + \partial_t \vec{\nabla} A^0) = \vec{j} \\ \Rightarrow \square \vec{A} &= \vec{j} - \partial_t \vec{\nabla} A^0 = \vec{j}_\perp \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \Rightarrow -\vec{\nabla} \cdot \vec{\partial}_t \vec{A} - \Delta A^0 = \rho \Rightarrow -\Delta A^0 = \rho. \end{aligned}$$

- in Coulomb-Eichung Problem mit  $\Pi^0 = 0$  gelöst  $\Rightarrow A^0$  ist kein dynamischer Freiheitsgrad
- wird ersetzt durch „instantanes Coulomb-Potential“

$$A^0(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\rho(t, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- in Maxwell-Ampère-Gesetz

$$\begin{aligned}\square \vec{A} = \vec{j}_\perp &= \vec{j} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\vec{\nabla}' \partial_t \rho(t, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \partial_t \rho(t, \vec{x}') \vec{\nabla}' \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \vec{j} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \partial_t \rho(t, \vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(t, \vec{x}')] \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}\end{aligned}$$

- Konsistenz mit Coulomb-Eichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \square \vec{A} = \square \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\perp = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(t, \vec{x}')] \Delta \underbrace{\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}}_{-4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')} = 0 \quad (-))$$

- NB: Lösung scheint „nicht kausal“ zu sein
- aber löst man Wellengleichung für  $\vec{A}$  mit **retardiertem Propagator** (klassische Theorie!), erhält man retardierte Lösungen für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$
- [Hee21]
- **Potentiale nicht beobachtbar!**

- Quantisierung des freien em. Feldes

- setze wieder  $\underline{j} = 0 \Rightarrow$  und verwende A der **Coulomb-Eichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \xrightarrow{\rho=0} A^0 = 0.$$

- „**Strahlungseichung**“ für *freies* em. feld
- Bewegungsgleichung für  $\vec{A}$ :

$$\square \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{masseloses Feld!}$$

- führe Modenfunktionen ein:

$$\vec{u}_{\vec{p},j}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2|\vec{p}|}} \vec{e}_j(\vec{p}) \exp(-i\underline{x} \cdot \underline{p})|_{p^0=E_p=|\vec{p}|}$$

- von **Coulomb-Eichbedingung**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\vec{p},j} = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{e}_j(\vec{p}) = 0.$$

- Es gibt nur zwei **Polarisationsfreiheitsgrade**

- wähle zu  $\vec{p}$  zwei aufeinander senkrechte reelle Einheitsvektoren  $\perp \vec{p}$ , so dass

$$\vec{\epsilon}_1(\vec{p}) \times \vec{\epsilon}_2(\vec{p}) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\epsilon}_3(\vec{p}) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^3 \vec{\epsilon}_j(\vec{p}) \vec{\epsilon}_j(\vec{p})^\dagger = \mathbb{1}_3 \Rightarrow \sum_{j=1}^2 \vec{\epsilon}_j(\vec{p}) \vec{\epsilon}_j(\vec{p})^\dagger = \mathbb{1}_3 - \frac{1}{\vec{p}^2} \vec{p} \vec{p}^T = \hat{P}_\perp(\vec{p}).$$

- entsprechen linear polarisierten ebenen Wellen
- masseloses Feld  $\Rightarrow$  erfordert Eichtheorie  
 $\Rightarrow$  für masseloses Vektorfeld nur 2 statt 3 „Spin-Freiheitsgrade“
- intrinsische Definition von Quantenzahlen: kein Ruhssystem für maselose Teilchen
- Wähle Drehimpulskomponente in Richtung von  $\vec{p}$ : Helizität
- links- und rechts-drehende zirkular polarisierte Wellen

$$\vec{\epsilon}_{L/R}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{\epsilon}_1(\vec{p}) \pm i \vec{\epsilon}_2(\vec{p})]$$

- L- (R=)polarisierte Wellen:  $h = +1$  ( $h = -1$ ) ( $\hat{=}$  Chiralität via Rechte-Hand-Regel)

- Quantisierung via Feynman-Stückelberg-Trick
- quantisiere bosonisch, also mit Kommutator-Relationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (Spin-Statistik-Theorem!)

- klassische Felder reell  $\Rightarrow$  Teilchen=Antiteilchen:

$$\begin{aligned} \vec{A}(t, \vec{x}) &= \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \left[ \mathbf{a}_j \vec{u}_{\vec{p}, j}(\underline{x}) + \mathbf{a}_j^\dagger \vec{u}_{\vec{p}, j}^*(\underline{x}) \right], \\ [\mathbf{a}_j(\vec{p}), \mathbf{a}_k(\vec{q})] &= 0, \quad [\mathbf{a}_j(\vec{p}), \mathbf{a}_k^\dagger(\vec{q})] = \delta_{jk} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \end{aligned}$$

- Energie- und Impuls

- Noether liefert kanonischen Energie-Impuls-Tensor  $\Theta^{\mu\nu}$  mit  $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$  aus zeitlicher und räumlicher Translationsinvarianz
- Problem:  $\Theta^{\mu\nu}$  nicht eichinvariant
- Lösung: verwende Belinfante-Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$  (vgl. Schluss von Vorl. 5)

- Resultiert in aus E-Dynamik bekannten Ausdrücken
- hier quantisierte Version (einschließlich Normalordnung, um divergierende Nullpunktsenergiebeiträge zu subtrahieren)
- Energiedichte  $\epsilon$  und Impulsdichte  $\vec{g}$  (ist in unseren natürlichen Einheiten mit  $c = 1$  und Symmetrie zugleich Energiestromdichte  $\vec{S}$ )

$$\epsilon(\underline{x}) = \frac{1}{2} : [\vec{\mathbf{E}}^2 + \vec{\mathbf{B}}^2] : , \quad \vec{g}(\underline{x}) = \vec{\mathbf{S}}(\underline{x}) =: \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} : .$$

mit

$$\vec{\mathbf{E}}(\underline{x}) = -\partial_t \vec{\mathbf{A}}(\underline{x}), \quad \vec{\mathbf{B}}(\underline{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}(\underline{x}).$$

- Modenentwicklung ergibt für Gesamt-Energie und -Impuls erwartungsgemäß

$$\mathbf{H} = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p E_p \mathbf{N}_j(\vec{p}) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p |\vec{p}| \mathbf{N}_j(\vec{p}), \quad \vec{\mathbf{P}} = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \vec{p} \mathbf{N}_j(\vec{p}).$$

- Gleichzeitige Feldkommutatorrelationen

- $\vec{\Pi}(\underline{x}) = \vec{E}(\underline{x}) = -\partial_t \vec{A}(\underline{x})$  (s.o.) aber

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^j(t, \vec{x}), \mathbf{A}^k(t, \vec{y})] &= 0 \\ [\mathbf{\Pi}^j(t, \vec{x}), \mathbf{\Pi}^k(t, \vec{y})] &= [\dot{\mathbf{A}}^j(t, \vec{x}), \dot{\mathbf{A}}^k(t, \vec{y})] = [\mathbf{E}^j(t, \vec{x}), \mathbf{E}^k(t, \vec{y})] = 0, \\ [\mathbf{A}^j(t, \vec{x}), \mathbf{\Pi}_k(t, \vec{x})] &= -[\mathbf{A}^j(t, \vec{x}), \mathbf{E}^k(t, \vec{x})] = i\delta_{\perp k}^j(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

mit

$$\delta_{\perp k}^j(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \left( \delta_k^j - \frac{p^j p^k}{\vec{p}^2} \right) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

- in  $\vec{x}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{\parallel k}^j(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \frac{p^j p^k}{\vec{p}^2} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \Rightarrow \\ \Delta \delta_{\parallel k}^j(\vec{x}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p p^j p^k \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \\ &= +\frac{1}{(2\pi)^3} \partial_j \partial_k \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) = +\partial_j \partial_k \delta^{(3)}(\vec{x}). \end{aligned}$$

- Green-Funktion von  $-\Delta$  ist  $1/(4\pi|\vec{x}|) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \delta_{\parallel k}^j(\vec{x}) &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x}' \frac{\partial_j \partial_k \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} = \Delta^{-1} \partial_j \partial_k \delta^{(3)}(\vec{x}) \Rightarrow \\ \delta_{\perp k}^j(\vec{x}) &= (\delta_{kj} - \Delta^{-1} \partial_j \partial_k) \delta^{(3)}(\vec{x}). \end{aligned}$$

- kompatibel mit Coulomb-Eichbedingungen, denn

$$[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}), \Pi_k(t, \vec{x})] = i\partial_j \delta_{\perp k}^j(\vec{x} - \vec{y}) = 0.$$

- aber anscheinend **Mikrokausalität verletzt**
- beobachtbare Größen müssen aber **eichinvariant** sein
- $\Rightarrow$  zusammengesetzt aus  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}^j(t, \vec{x}), \mathbf{E}^k(t, \vec{y})] &= [\mathbf{B}^j(t, \vec{x}), \mathbf{B}^k(t, \vec{y})] = 0, \\ [\mathbf{B}^j(t, \vec{x}), \mathbf{E}^k(t, \vec{y})] &= i\epsilon^{jka} \partial_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

### 3 Literatur

#### Literatur

#### Literatur

- [BD64] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).
- [Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), <https://doi.org/10.1142/9371>.
- [Gre05] M. Greiter, Is electromagnetic gauge invariance spontaneously violated in superconductors?, *Annals of Physics* **319**, 217 (2005), <https://doi.org/10.1016/j.aop.2005.03.008>.
- [Hee02] H. van Hees, Introduction to Quantum Field Theory (2002), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/lect.pdf>.
- [Hee21] H. van Hees, Comment on “Defining the electromagnetic potentials”, *Eur. J. Phys.* **41**, 045202 (2021), <https://doi.org/10.1088/1361-6404/abc137>.
- [LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).
- [SU76] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer-Verlag (1976).

- [Wei95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1, Cambridge University Press (1995).