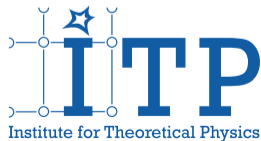


Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 6: Quantisierung des freien Klein-Gordon-Feldes

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt



Outline

Quantenfeldtheorie: Motivation

Quantisierung des freien Klein-Gordon-Feldes

Bibliography

Motivation für relativistische Quantenfeldtheorien

Literatur: [\[LL91, BR50, Hob13, Hob24\]](#)

Motivation für Feldquantisierung

► Physikalische Argumente

- Stöße von Teilchen bei „relativistischen Energien“
- „relativistisch: $\Delta E > mc^2 \Rightarrow$ Teilchenerzeugung und -vernichtung
- Quantenfeldtheorie (QFT):
bequemste Beschreibung von Quantentheorie bei nicht erhaltenen Teilchenzahlen
- Versuch, 1. Quantisierung a la nichtrelativistische Quantenmechanik \Rightarrow nicht nach unten beschränkte Hamilton-Operatoren \Rightarrow kein stabiler Grundzustand
- historisch: Diracs Theorie des Elektrons \Rightarrow Zwang, die „Wellenfunktion“ a la 1. Quantisierung als Vielteilchentheorie zu reinterpretieren
- Dirac-See, Positronen als Löcher
- \Rightarrow Antiteilchen: Antielektron=Positron e^+ (gleiche Masse, Ladung $+e$)
- versuche Teilchen in Box der Länge L einzusperren: $\Delta x \geq L$
- minimaler Impuls $\frac{2\pi\hbar}{L} \simeq \Delta p$
- benötigte für hinreichend kleine Δx Energie $\geq mc^2$
- anstatt einzelnes Teilchen zu lokalisieren: erzeuge stattdessen neue Teilchen
- relativistische QT: Teilchen nicht beliebig genau lokalisierbar
- für Teilchen in Ruhe $\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{mc}$

Motivation für Feldquantisierung

▶ Theoretische Argumente

- ▶ es gibt keine endlichdimensionalen *unitären Darstellungen* der Lorentz-Gruppe (außer der trivialen)
- ▶ einzige mögliche erst-quantisierte Theorie: skalares Feld?
- ▶ klassisches freies Klein-Gordon-Feld: Energie nicht nach unten geschränkt:
- ▶ Feldmoden mit positiver und negativer Frequenz notwendig, damit sich Feld unter Lorentz-Transformationen als Skalarfeld transformiert
- ▶ kein erhaltener Strom mit **positiv definiter Ladungsdichte**
⇒ **Born-Regel** inkonsistent für Einteilchenwellenfunktion
- ▶ brauche offensichtlich auch Spin-1/2-Felder und Spin-1-Felder,...

Motivation für Feldquantisierung

- ▶ **Kanonische Quantisierung**: klassische Wirkung, Lagrange- und Hamilton-Funktion
- ▶ **relativistische klassische Punktteilchenmechanik**
 - ▶ beliebige Anzahl **freier Teilchen** \Rightarrow keine Probleme
 - ▶ 1 Teilchen in (elektromagnetischem) äußeren Feld:
muss zunächst „Strahlungsrückwirkung“ vernachlässigen
 - ▶ mit Strahlungsrückwirkung \Rightarrow **Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichung**
 \Rightarrow **Akausalitäten: „preacceleration“**
 - ▶ muss störungstheoretische Näherung machen \Rightarrow **Landau-Lifshitz-Gleichung**,
funktioniert aber nur in niedrigster Ordnung [Nak13, Roh07, Lec18]
 - ▶ **Nogo-Theorem**: keine relativistisch kovariante **Hamilton-Theorie** für wechselwirkendes Vielteilchensystem (**Leutwyler**) [Leu65]

Motivation für Feldquantisierung

- ▶ **Ausweg:** Feldquantisierung \Rightarrow Vielteilchentheorie
 - ▶ hervorragender empirischer Erfolg
 - ▶ grundlegende Vorhersagen aller lokalen QFTn: Spin-Statistik-Theorem: Teilchen mit **ganzzahligem** (**halbzahligem**) Spin notwendig **Bosonen** (**Fermionen**)
 - ▶ CPT-Theorem: bis dato stets mit hoher Präzision bestätigt
 - ▶ hochpräzise Vorhersagen der QED: magnetische Momente von e^- und μ^- , Lamb-Shift bei (Wasserstoff-)Atomen \Rightarrow em. Feld muss **Vakuumfluktuationen** aufweisen
 - ▶ semiklassische Theorie (klassisches em. Feld, quantisierte Ladungen) reicht weit, kann aber og. „Strahlungskorrekturen“ (höhere Ordnungen der Störungstheorie) nicht erklären
 - ▶ **spontane Emission** \Rightarrow Quantisierung des **elektromagnetischen Feldes** notwendig
 - ▶ klare Bestätigung auch durch **Quantenoptik** [SZ97, GC08]

Motivation für Feldquantisierung

- ▶ Relativistische QFT
 - ▶ im **Vakuum**: Beschreibung von Streuprozessen
⇒ **Berechnung von Streuquerschnitten** (Störungstheorie)
 - ▶ **Vielteilchentheorie**: thermodynamisches Gleichgewicht: **Zustandsgleichung der stark wechselwirkenden Materie**
 - ▶ **Nichtgleichgewichtstheorie**:
Herleitung von relativistischen **Quanten-Transportgleichungen/Hydrodynamik** zur Beschreibung von Schwerionenstößen

Quantisierung des freien Klein-Gordon-Feldes

Literatur: [Pes79, Col18, GR96]

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ klassische Theorie (s. Übung 5) für **komplexes Skalarfeld**
 - ▶ Lagrangian (Poincaré-invariant):

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi$$

- ▶ kanonische Feldimpulse

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} = \partial^\mu \Phi^*, \quad \Pi^{*\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} = \partial^\mu \Phi$$

- ▶ **Feldgleichungen**: Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Pi^{*\mu} = \square \Phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} = -m^2 \Phi \Rightarrow (\square + m^2) \Phi = 0, \\ \partial_\mu \Pi^\mu = \square \Phi^* &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -m^2 \Phi^* \Rightarrow (\square + m^2) \Phi^* = 0 \end{aligned}$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

► Kanonische Feldquantisierung

- im **Heisenbergbild**: nur Observablen-Operatoren zeitabhängig
- Zustände zeitunabhängig
⇒ repräsentieren „**Präparation des Systems**“ zur Anfangszeit
- kanonische Quantisierung: $\Phi \rightarrow \hat{\Phi}, \Phi^* \rightarrow \hat{\Phi}^\dagger$
- Zeitargument der Felder: Zeit wie in nichtrelativistische QM als Parameter
- Ortsargument der Felder: „Label“ für unendlich viele Freiheitsgrade!
- NB: Führe keine Operatoren für „Ortskoordinaten“ ein!
- Zeit- und Ortskoordinaten \underline{x} werden **gleichartig als Parameter** behandelt
- kanonische **gleichzeitige Vertauschungsrelationen** für $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Pi} \equiv \hat{\Pi}^0$:

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}(t, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{y})] = [\hat{\dot{\Phi}}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\dot{\Phi}}^\dagger(t, \vec{y})] = 0,$$

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}^\dagger(t, \vec{y})] = 0, \quad [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\dagger(t, \vec{y})] = [\hat{\dot{\Phi}}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\dot{\Phi}}(t, \vec{y})] = 0,$$

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{y})] = [\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\dot{\Phi}}^\dagger(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$[\hat{\Phi}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\Pi}^\dagger(t, \vec{y})] = [\hat{\Phi}^\dagger(t, \vec{x}), \hat{\dot{\Phi}}(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ **Hamilton-operator** (CAVEAT: Operatorordnungsproblem!)

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\dot{\Phi}(t, \vec{x}) \Pi(t, \vec{x}) + \dot{\Phi}^\dagger(t, \vec{x}) \Pi^\dagger(t, \vec{x}) - \mathcal{L} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[(\partial_t \Phi^\dagger(t, \vec{x})) (\partial_t \Phi(t, \vec{x})) + (\vec{\nabla} \Phi^\dagger(t, \vec{x})) (\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x})) + m^2 \Phi^\dagger(t, \vec{x}) \Phi(t, \vec{x}) \right].\end{aligned}$$

- ▶ NB: \mathcal{H} stimmt mit (quantisierter) Energiedichte $\varepsilon = \Theta^{00}$ kanonischer Energie-Impuls-Operator vom **Noether-Theorem** überein
- ▶ $\Rightarrow \mathbf{H}$ repräsentiert Energie

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

► Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{i} [\Phi(t, \vec{x}), \mathbf{H}], \\ \partial_t \Pi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{i} [\Phi(t, \vec{x}), \mathbf{H}].\end{aligned}$$

- und entsprechend für Φ^\dagger und Π^\dagger
- mit kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$(\square + m^2)\Phi = (\square + m^2)\Phi^\dagger = 0.$$

- Feldoperatoren erfüllen **Klein-Gordon-Gleichung**

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

► Lösungen der Operatorfeldgleichungen

- völlig analog zu klassischen Gleichungen (da **lineare Gleichungen**)
- verwende Resultate von Übung Sheet 5
- **Moden-Funktionen**

$$u_{\vec{p}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \exp(-i\underline{x} \cdot \underline{p})|_{p^0=E_p}, \quad E_p = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

- Normierungskonvention (NB: (Φ_1, Φ_2) **indefinite Bilinearform!**)

$$(\Phi_1, \Phi_2) = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \Phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_t \Phi_2, \quad (u_{\vec{p}}, u_{\vec{q}}) = (u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{q}}^*) = 0, \quad (u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{q}}) = -(u_{\vec{q}}, u_{\vec{p}}^*) = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$$

- **Moden-Zerlegung** des Feldoperators

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} [\mathbf{a}(\vec{p}) u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) u_{\vec{p}}^*(\underline{x})]$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ **Kommutatorregeln** für $\mathbf{a}(\vec{p})$ und $\mathbf{b}(\vec{p})$

$$\mathbf{a}(\vec{p}) = (u_{\vec{p}}, \Phi), \quad \mathbf{b}(\vec{p}) = (u_{\vec{p}}, \Phi)$$

- ▶ mit gleichzeitigen Kommutatorrelationen der Felder

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}(\vec{q})] &= [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})] = [\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})] = [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})] = 0, \\ [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q})] &= [\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \end{aligned}$$

- ▶ potentiell Probleme mit δ -**Distributionen**
- ▶ **Regularisierung: endliches Volumen**
 - ▶ die δ -Distribution ist problematisch (kontinuierliche Impulse, $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$)
 - ▶ „Teilchen“ in endlichem Würfel der Kantenlänge L
 - ▶ möchte selbstadjungierten Operator $-i\vec{\nabla}$ (Impuls in der 1. Quantisierung) \Rightarrow **periodische Randbedingungen**

$$\Phi(t, \vec{x} + L\vec{n}) = \Phi(t, \vec{x}), \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ **Modenentwicklung** wie im \mathbb{R}^3 aber auf $\vec{x} \in V = [0, L]^3$ beschränkt
⇒ Fourier-Reihe statt Fourier-Integral

$$\vec{p} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3, \quad \Phi(\underline{x}) = \sum_{\vec{p}} \left[\mathbf{a}(\vec{p}) u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) \right]$$

- ▶ **Modenfunktionen**

$$u_{\vec{p}}(\underline{x}) = N(\vec{p}) \exp(-i\underline{p} \cdot \underline{x}) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}}$$

- ▶ **Normierung**

$$(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{q}}) = \int_V d^3 \vec{x} u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\vec{q}}(\underline{x}) \stackrel{!}{=} \delta_{\vec{p}, \vec{q}} \Rightarrow N(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{V 2E_{\vec{p}}}}$$
$$u_{\vec{p}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{V 2E_{\vec{p}}}} \exp(-i\underline{p} \cdot \underline{x}) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}}$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ analog wie im \mathbb{R}^3 : **Kommutatorrelationen**

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}(\vec{q})] &= [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})] = [\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})] = [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})] = 0, \\ [\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q})] &= [\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})] = \delta_{\vec{p}, \vec{q}} = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{p} = \vec{q}, \\ 0 & \text{für } \vec{p} \neq \vec{q}. \end{cases} \end{aligned}$$

- ▶ **unendlich viele unabhängige harmonische Oszillatoren**
- ▶ $\mathbf{a}(\vec{p})$ und $\mathbf{b}(\vec{p})$ **vernichten** Oszillatoranregungen mit Impuls \vec{p}
- ▶ $\mathbf{a}^\dagger(\vec{p})$ und $\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})$ **erzeugen** Oszillatoranregungen mit Impuls \vec{p}
- ▶ \mathbf{a} und \mathbf{b} verschiedenartige Anregungen
- ▶ $\mathbf{N}_a(\vec{p}) = \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p})$ **Anzahloperator für „a-Anregungen“**
- ▶ $\mathbf{N}_b(\vec{p}) = \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})$ **Anzahloperator von „b-Anregungen“**
- ▶ verallgemeinertes VONS: Vakuumzustand (keine Anregungen):

$$\forall \vec{p}: \quad \mathbf{a}(\vec{p})|\Omega\rangle = \mathbf{b}(\vec{p})|\Omega\rangle = 0$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ **Besetzungszahldarstellung:** VONS von gemeinsamen Eigenvektoren von $\mathbf{N}_a(\vec{p})$ und $\mathbf{N}_b(\vec{p})$ mit Eigenwerten $N_a(\vec{p}), N_b(\vec{p}) \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$|\{N_a(\vec{p}), N_b(\vec{p})\}\rangle = \prod_{\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{N_a(\vec{p})! N_b(\vec{p})!}} \mathbf{a}^{\dagger N_a(\vec{p})(\vec{p})} \mathbf{b}^{\dagger N_b(\vec{p})(\vec{p})} |\Omega\rangle$$

- ▶ **Teilcheninterpretation:**

- ▶ Zustände invariant unter Vertauschung beliebiger $\vec{p}_k \Rightarrow$ **Teilchen Bosonen**
- ▶ Teilchen in (relativistischer *und* nichtrelativistischer) QT nicht **individualisierbar**
- ▶ Teilchensorten nur unterscheidbar durch **intrinsische „Quantenzahlen“**:
Masse, Spin $s \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$, Ladung(en)
- ▶ gleichartige Teilchen in Raumdimensionen $d \geq 3$:
 - ▶ **Bosonen** (Zustände ändern sich nicht unter Vertauschung beliebiger Teilchenpaare)
 - ▶ **Fermionen** (Zustände ändern *Vorzeichen* unter Vertauschung beliebiger Teilchenpaare)

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

► Energie und Impuls

- from Noether's theorem: **kanonischer Energie-Impulstensor** (s. Übungen Sheet 5)
- quantisiert: **CAVEAT: Operatorordnungsproblem!**

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^\mu \Phi^\dagger)(\partial^\nu \Phi) + (\partial^\mu \Phi)(\partial^\nu \Phi^\dagger) - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}$$

► Energie- und Impulsdichteoperatoren

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Theta^{00} = (\partial_t \Phi)^\dagger (\partial_t \Phi) + (\vec{\nabla} \Phi^\dagger) \cdot (\vec{\nabla} \Phi) + m^2 \Phi^\dagger \Phi,$$

$$\vec{\mathbf{g}} = -(\partial_t \Phi^\dagger)(\vec{\nabla} \Phi) - (\vec{\nabla} \Phi^\dagger)(\partial_t \Phi).$$

► Gesamt-Energie und -Impuls

$$\underline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \vec{\mathbf{P}} \end{pmatrix} = \int_V d^3 \vec{x} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(t, \vec{x}) \\ \vec{\mathbf{g}}(t, \vec{x}) \end{pmatrix} = \sum_{\vec{p}} \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} \\ \vec{p} \end{pmatrix} [\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}(\vec{p}) \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})]$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ Operatorordnungsproblem ergibt **unendlichen Vakuumbbeitrag**

$$\langle \Omega | \underline{\mathbf{P}} | \Omega \rangle = \sum_{\vec{p}} \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

- ▶ $[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ (**c-Zahl!**)
- ▶ **Normalordnung** ändert bis auf eine divergierende **c-Zahl-Konstante** Energie- und Impulsoperatoren nicht:

$$: \underline{\mathbf{P}} : := \int_V d^3 \vec{x} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t, \vec{x}) \\ \mathbf{g}(t, \vec{x}) \end{pmatrix} = \sum_{\vec{p}} \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} \\ \vec{p} \end{pmatrix} [\mathbf{a}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) \mathbf{b}(\vec{p})]$$

- ▶ Normalordnungsvorschrift für Funktionen der Feldoperatoren: $: \mathcal{A}(\underline{x}) :$
 - ▶ schreibe Φ und Φ^\dagger mit Erzeuger- und Vernichteroperatoren (Modonentwicklung)
 - ▶ ordne alle Erzeuger ganz nach links und alle Vernichter ganz nach rechts
 - ▶ vernachlässige c-Zahl-Kommutatoren zwischen Erzeugern und Vernichtern

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ **QFT löst Probleme der 1. Quantisierung:**

- ▶ Hamilton-Operator beschränkt nach unten: Gesamtenergieeigenwerte $E \geq 0$
- ▶ Vakuum (keine Feldanregungen $\hat{=}$ keine Teilchen):

$$\underline{\mathbf{P}} |\Omega\rangle = 0$$

- ▶ Moden mit **positiver** (**negativer**) Frequenz: **Vernichter** (**Erzeuger**) in Modenentwicklung (**Feynman-Stueckelberg-Trick**)
- ▶ **$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$** : verschiedene Teilchenarten mit gleicher Masse
- ▶ intrinsische Quantenzahl zur Unterscheidung zwischen „ a - und b -Teilchen“?

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

► Ladungsquantenzahl

- Lagrangian invariant unter **Phasenumdefinition** der Felder bzw. Feldoperatoren

$$\Phi'(\underline{x}) = \exp(-iq\alpha)\Phi(\underline{x}), \quad \Phi'^{\dagger}(\underline{x}) = \exp(+iq\alpha)\Phi^{\dagger}(\underline{x}),$$

- $q, \alpha \in \mathbb{R}$
- Noether: erhaltene Ladung (s. Übungen Blatt 4)
- **wende gleich Normalordnung** an!

$$\mathbf{j}_{\mu}(\underline{x}) = iq : \Phi^{\dagger}(\underline{x}) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \Phi := iq : [\Phi^{\dagger}(\underline{x}) \partial_{\mu} \Phi(\underline{x}) - (\partial_{\mu} \Phi^{\dagger}(\underline{x}))] :$$

- Erhaltung der entsprechenden Ladung

$$\mathbf{Q} = \int_V d^3 \vec{x} \mathbf{j}^0(\underline{x}) = q \sum_{\vec{p}} [\mathbf{N}_a(\vec{p}) - \mathbf{N}_b(\vec{p})]$$

- a -Teilchen trägt erhaltene Ladung q , b -Teilchen ($-q$)
- b -Teilchen ist **Antiteilchen** von a -Teilchen (und vice versa)
- Spezialfall: **strikt neutrales Teilchen** $\Leftrightarrow \mathbf{b}(\vec{p}) = \mathbf{a}(\vec{p}) \Leftrightarrow \Phi^{\dagger}(\underline{x}) = \Phi(\underline{x}) \Leftrightarrow \mathbf{j}_{\mu} \equiv 0, \mathbf{Q} \equiv 0$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

► Zurück zum \mathbb{R}^3 („ $V, L \rightarrow \infty$ “)

- für $L \rightarrow \infty$: diskrete $\vec{p} \in 2\pi\vec{n}/L$ mit $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$ rücken immer enger zusammen
- in Impulsvolumen $\Delta^3\vec{p}$ sind $\Delta^3\vec{n} = \Delta^3(\vec{p})V/(2\pi)^3$ Zustände
- damit ergibt sich Limes für „Fourier-Summen“ \rightarrow „Fourier-Integral“

$$\int_V d^3\vec{x} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}, \quad \sum_{\vec{p}} \rightarrow V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}$$

- geht man auch zu den ursprünglichen Modenfunktionen mit

$$N(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{V2E_{\vec{p}}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}$$

zurück, folgt in **Modenentwicklung**

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p}$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ NB: durch Normalordnung keine Probleme mehr mit

$$\underline{\mathbf{P}} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p} \end{pmatrix} [\mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})].$$

- ▶ $\mathbf{N}_a(\vec{p}) = \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p})$ und $\mathbf{N}_b(\vec{p}) = \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})$ repräsentieren jetzt Teilchendichte pro Impulsvolumen:

$$[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q})] = i\delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p})$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

▶ Diskrete Symmetrien

- ▶ Wigner-Theorem: Symmetrietransformationen immer stets durch **unitären oder antiunitären Operator** auf Hilbert-Raum realisiert [Got89]

$$\mathbf{U} \text{ unitär: } \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{U}(\lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle) = \lambda_1 \mathbf{U} |\psi_1\rangle + \lambda_2 \mathbf{U} |\psi_2\rangle$$

$$\mathbf{U} \text{ antiunitär: } \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{U}(\lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle) = \lambda_1^* \mathbf{U} |\psi_1\rangle + \lambda_2^* \mathbf{U} |\psi_2\rangle$$

- ▶ für stetig mit $\mathbb{1}$ zusammenhängend **immer unitär**
- ▶ für **diskrete Symmetrien**: kann auch **antiunitär realisiert sein**

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

▶ Raumspiegelungen

- ▶ Klein-Gordon-Gleichung auch invariant unter **Raumspiegelungen**

$$\hat{P} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

- ▶ zuerst für **geladene Klein-Gordon-Felder**
- ▶ dann kann man Phasenfaktoren in der Definition von **P** mittels **Q** wegtransformieren \Rightarrow alle Realisierungen mit beliebigen Phasenfaktoren η_P

$$\mathbf{P} \Phi(\underline{x}) \mathbf{P} = \eta_P \Phi(\hat{P} \underline{x})$$

äquivalent

- ▶ setze im folgenden: $\eta_P = 1$
- ▶ versuche zuerst Realisierung mit **unitärem Operator**
- ▶ soll sich unter \hat{P} als **Skalarfeld**, also analog wie unter $SO(1,3)^\dagger$ -Transformationen verhalten

$$\mathbf{P} \Phi(\underline{x}) \mathbf{P}^\dagger = \Phi(\hat{P} \underline{x}) \Rightarrow \mathbf{P} \mathbf{P} = \mathbb{1}$$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ Wirkung auf Erzeuger-Vernichter-Operatoren:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Phi(\underline{x})\mathbf{P}^\dagger &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{P}\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{P}^\dagger u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{P}\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{P}^\dagger u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) \right] \hat{=} \Phi(\hat{P}\underline{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}(\vec{p})u_{\vec{p}}(\hat{P}\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})u_{\vec{p}}^*(\hat{P}\underline{x}) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}(\vec{p})u_{-\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})u_{-\vec{p}}^*(\underline{x}) \right] \quad (\text{substituiere } \vec{p} \rightarrow -\vec{p}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}(-\vec{p})u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(-\vec{p})u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) \right] \\ \Rightarrow \mathbf{P}\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{P}^\dagger &= \mathbf{a}(-\vec{p}), \quad \mathbf{P}\mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{b}(-\vec{p})\end{aligned}$$

- ▶ erwartetes Verhalten aus klassischer Physik: $\vec{p} = d\vec{x}/dt \mapsto -\vec{p}$

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ **Raumspiegelung für ungeladene Klein-Gordon-Felder**
 - ▶ $\Phi^\dagger = \Phi$: **keine unitäre Phasenumdefinitionstransformation mehr** ($\hat{Q} = 0$)
 - ▶ $\eta_P = 1$ („skalares Feld“) oder $\eta_P = -1$ (pseudoskalares Feld)

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ Klein-Gordon-Gleichung auch invariant unter **Zeitspiegelungen**

$$\hat{T} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} \Phi(\underline{x}) \mathbf{T}^\dagger = \Phi(\hat{T} \underline{x})$$

- ▶ kann wieder $\eta_T = 1$ setzen
- ▶ unitäre Realisierung führt auf Widersprüche mit Modenentwicklung! (Übung!)

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ **antiunitäre Realisierung** funktioniert:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\Phi(\underline{x})\mathbf{T}^\dagger &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{T}\mathbf{a}(\vec{p})u_{\vec{p}}(\underline{x})\mathbf{T}^\dagger + \mathbf{T}\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})u_{\vec{p}}^*(\underline{x})\mathbf{T}^\dagger \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{T}\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{T}^\dagger u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) + \mathbf{T}\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{T}^\dagger u_{\vec{p}}(\underline{x}) \right] \hat{=} \Phi(\hat{T}\underline{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}(\vec{p})u_{\vec{p}}(\hat{T}\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})u_{\vec{p}}^*(\hat{T}\underline{x}) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}(\vec{p})u_{-\vec{p}}^*(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})u_{-\vec{p}}(\underline{x}) \right] \quad (\text{substituiere } \vec{p} \rightarrow -\vec{p}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{a}(-\vec{p})u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(-\vec{p})u_{\vec{p}}(\underline{x}) \right] \\ \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{T}^\dagger &= \mathbf{a}(-\vec{p}), \quad \mathbf{T}\mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{b}(-\vec{p})\end{aligned}$$

- ▶ CAVEAT: Bzgl. Wirkung auf Erzeuger und Vernichter sieht **T** wie **P** aus **aber T antiunitär** und **P unitär**!

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

- ▶ auch invariant unter Vertauschung von Teilchen mit Anti-Teilchen:
Ladungskonjugation
- ▶ **unitäre Transformation**

$$\mathbf{C}\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{b}(\vec{p}), \quad \mathbf{C}\mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{a}(\vec{p}),$$

- ▶ Wirkung auf Felder

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\Phi(\underline{x})\mathbf{C}^\dagger &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{C}\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{C}^\dagger u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{C}\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{C}^\dagger u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{p} \left[\mathbf{b}(\vec{p})u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})u_{\vec{p}}^*(\underline{x}) \right] = \Phi^\dagger(\underline{x})\end{aligned}$$

- ▶ $\Rightarrow \mathbf{C}^2 = \mathbb{1}$
- ▶ für strikt neutrales Klein-Gordon-Teilchen: $\mathbf{C}\Phi\mathbf{C}^\dagger = \Phi \Leftrightarrow$ Teilchen \equiv Antiteilchen

Quantisiertes Klein-Gordon-Feld

▶ CPT

- ▶ $\Theta := \mathbf{CPT}$ (*anti*unitär): $\Theta\Phi(\underline{x})\Theta^\dagger = \Phi^\dagger(\hat{P}\hat{T}\underline{x}) = \Phi^\dagger(-\underline{x})$
- ▶ **Wirkung invariant unter CPT-Trafo!**
- ▶ es gilt allgemein, dass jede lokale QFT mit selbstadjungierter Lorentz-invarianter Lagrange-Dichte und bei Gültigkeit des Spin-Statistik-Theorems auch **CPT**-invariant ist
- ▶ empirisch bis dato hervorragend bestätigt
- ▶ **CPT-Theorem** von Pauli (1955), Lüders (1957) bewiesen

Bibliography

- [BR50] N. Bohr and L. Rosenfeld, Field and Charge Measurements in Quantum Electrodynamics, Phys. Rev. **78**, 794 (1950), <https://link.aps.org/abstract/PR/v78/i6/p794>.
- [Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), <https://doi.org/10.1142/9371>.
- [GC08] J. Garrison and R. Chiao, *Quantum optics*, Oxford University Press, New York (2008), <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198508861.001.0001>.
- [Got89] K. Gottfried, *Quantum Mechanics, Volume 1: Fundamentals*, CRC Press Taylor&Francis Group, Boca Raton (1989).
- [GR96] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, Berlin, Heidelberg (1996), <https://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-61485-9>.

Bibliography

- [Hob13] A. Hobson, There are no particles, there are only fields, *Am. Jour. Phys.* **81**, 211 (2013), <https://doi.org/10.1119/1.4789885>.
- [Hob24] A. Hobson, *Fields and Their Quanta*, Springer, Cham (2024), <https://doi.org/10.1007/978-3-031-72613-2>.
- [Lec18] K. Lechner, *Classical Electrodynamics*, Springer International Publishing AG, Cham (2018), <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91809-9>.
- [Leu65] H. Leutwyler, A no-interaction theorem in classical relativistic Hamiltonian particle mechanics, *Nuovo Cim.* **37**, 556 (1965), <https://doi.org/10.1007/BF02749856>.
- [LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).

Bibliography

- [Nak13] C. Nakhleh, The Lorentz-Dirac and Landau-Lifshitz equations from the perspective of modern renormalization theory, *Am. J. Phys* **81**, 180 (2013), <https://dx.doi.org/10.1119/1.4773292>.
- [Pes79] M. E. Peskin, Short Distance Analysis for Heavy Quark Systems. 1. Diagrammatics, *Nucl. Phys. B* **156**, 365 (1979), [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90199-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90199-8).
- [Roh07] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai (2007).
- [SZ97] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (1997).