# Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik
# Vorlesung 6: Quantisierung des freien Klein-Gordon-Feldes

Hendrik van Hees

## Inhaltsverzeichnis



## 1 Quantenfeldtheorie: Motivation

# Motivation für relativistische Quantenfeldtheorien

Literatur: [LL91, BR50, Hob13, Hob24]

**Motivation für Feldquantisierung**

- Physikalische Argumente
  - Stöße von Teilchen bei „ relativistischen Energien“
  - „relativistisch: $\Delta E > mc^2 \Rightarrow$ Teilchenerzeugung und -vernichtung
  - Quantenfeldtheorie (QFT): bequemste Beschreibung von Quantentheorie bei nicht erhaltenen Teilchenzahlen
  - Versuch, 1. Quantisierung a la nichtrelativistische Quantenmechanik $\Rightarrow$ nicht nach unten beschränkte Hamilton-Operatoren $\Rightarrow$ kein stabiler Grundzustand
  - historisch: Diracs Theorie des Elektrons $\Rightarrow$ Zwang, die „Wellenfunktion“ a la 1. Quantisierung als Vielteilchentheorie zu reinterpretieren
  - Dirac-See, Positronen als Löcher
  - $\Rightarrow$ Antiteilchen: Antielektron=Positron $e^+$ (gleiche Masse, Ladung $+e$)
  - versuche Teilchen in Box der Länge $L$ einzusperren: $\Delta x \geq L$
  - minimaler Impuls $\frac{2\pi\hbar}{L} \simeq \Delta p$
  - benötige für hinreichend kleine $\Delta x$ Energie $\geq mc^2$
  - anstatt einzelnes Teilchen zu lokalisieren: erzeuge stattdessen neue Teilchen
  - relativistische QT: Teilchen nicht beliebig genau lokalisierbar
  - für Teilchen in Ruhe $\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{mc}$

- Theoretische Argumente
  - es gibt keine endlichdimensionalen *unitären* Darstellungen der Lorentz-Gruppe (außer der trivialen)
  - einzige mögliche erst-quantisierte Theorie: skalares Feld?
  - klassisches freies Klein-Gordon-Feld: Energie nicht nach unten geschränkt:
  - Feldmoden mit positiver und negativer Frequenz notwendig, damit sich Feld unter Lorentz-Transformationen als Skalarfeld transformiert

- kein erhaltener Strom mit positiv definiter Ladungsdichte ⇒ Born-Regel inkonsistent für Einteilchenwellenfunktion
- brauche offensichtlich auch Spin-1/2-Felder und Spin-1-Felder,...

- Kanonische Quantisierung: klassische Wirkung, Lagrange- und Hamilton-Funktion
- relativistische klassische Punktteilchenmechanik
  - beliebige Anzahl freier Teilchen ⇒ keine Probleme
  - 1 Teilchen in (elektromagnetischem) äußeren Feld: muss zunächst „Strahlungsrückwirkung“ vernachlässigen
  - mit Strahlungsrückwirkung ⇒ Lorentz-Abraham-Dirac-Gleichung ⇒ Akausalitäten: „preacceleration“
  - muss störungstheoretische Näherung machen ⇒ Landau-Lifshitz-Gleichung, funktioniert aber nur in niedrigster Ordnung [Nak13, Roh07, Lec18]
  - Nogo-Theorem: keine relativistisch kovariante Hamilton-Theorie für wechselwirkendes Vielteilchensystem (Leutwyler) [Leu65]

- Ausweg: Feldquantisierung ⇒ Vielteilchentheorie
  - hervorragender empirischer Erfolg
  - grundlegende Vorhersagen aller lokalen QFTn: Spin-Statistik-Theorem: Teilchen mit ganzzahligem (halbzahligem) Spin notwendig Bosonen (Fermionen)
  - CPT-Theorem: bis dato stets mit hoher Präzision bestätigt
  - hochpräzise Vorhersagen der QED: magnetische Momente von $e^-$ und $\mu^-$, Lamb-Shift bei (Wasserstoff-)Atomen ⇒ em. Feld muss Vakuumfluktuationen aufweisen
  - semiklassische Theorie (klassisches em. Feld, quantisierte Ladungen) reicht weit, kann aber og. „Strahlungskorrekturen“ (höhere Ordnungen der Störungstheorie) nicht erklären
  - spontane Emission ⇒ Quantisierung des elektromagnetischen Feldes notwendig
  - klare Bestätigung auch durch Quantenoptik [SZ97, GC08]

- Relativistische QFT

- im Vakuum: Beschreibung von Streuprozessen $\Rightarrow$ Berechnung von Streuquerschnitten (Störungstheorie)
- Vielteilchentheorie: thermodynamisches Gleichgewicht: Zustandsgleichung der stark wechselwirkenden Materie
- Nichtgleichgewichtstheorie: Herleitung von relativistischen Quanten-Transportgleichungen/Hydrodynamik zur Beschreibung von Schwerionenstößen

## 2 Quantisierung des freien Klein-Gordon-Feldes

# Quantisierung des freien Klein-Gordon-Feldes

Literatur: [Pes79, Col18, GR96]

**Quantisiertes Klein-Gordon-Feld**

- klassische Theorie (s. Übung 5) für komplexes Skalarfeld
  - Lagrangian (Poincaré-invariant):
  $$\mathscr{L} = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi$$
  - kanonische Feldimpulse
  $$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = \partial^\mu \Phi^*, \quad \Pi^{*\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^*)} = \partial^\mu \Phi$$
  - Feldgleichungen: Euler-Lagrange-Gleichungen
  $$\partial_\mu \Pi^{*\mu} = \Box \Phi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi^*} = -m^2 \Phi \Rightarrow (\Box + m^2)\Phi = 0,$$
  $$\partial_\mu \Pi^{\mu} = \Box \Phi^* = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi} = -m^2 \Phi^* \Rightarrow (\Box + m^2)\Phi^* = 0$$

- Kanonische Feldquantisierung
  - im Heisenbergbild: nur Observablen-Operatoren zeitabhängig
  - Zustände zeitunabhängig $\Rightarrow$ repräsentieren „Präparation des Systems“ zur Anfangszeit
  - kanonische Quantisierung: $\Phi \longrightarrow \mathbf{\Phi}$, $\Phi^* \longrightarrow \mathbf{\Phi}^\dagger$
  - Zeitargument der Felder: Zeit wie in nichtrelativistische QM als Parameter
  - Ortsargument der Felder: „Label“ für unendlich viele Freiheitsgrade!
  - NB: Führe keine Operatoren für „Ortskoordinaten“ ein!
  - Zeit- und Ortskoordinaten $\underline{x}$ werden gleichartig als Parameter behandelt

– kanonische gleichzeitige Vertauschungsrelationen für $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Pi} \equiv \mathbf{\Pi}^0$:

$$\left[\mathbf{\Phi}(t,\vec{x}),\mathbf{\Phi}(t,\vec{y})\right]=0,\quad \left[\mathbf{\Pi}(t,\vec{x}),\mathbf{\Pi}(t,\vec{y})\right]=\left[\dot{\mathbf{\Phi}}^\dagger(t,\vec{x}),\dot{\mathbf{\Phi}}^\dagger(t,\vec{y})\right]=0,$$
$$\left[\mathbf{\Phi}(t,\vec{x}),\mathbf{\Phi}^\dagger(t,\vec{y})\right]=0,\quad \left[\mathbf{\Pi}(t,\vec{x}),\mathbf{\Pi}^\dagger(t,\vec{y})\right]=\left[\dot{\mathbf{\Phi}}^\dagger(t,\vec{x}),\dot{\mathbf{\Phi}}(t,\vec{y})\right]=0,$$
$$\left[\mathbf{\Phi}(t,\vec{x}),\mathbf{\Pi}(t,\vec{y})\right]=\left[\mathbf{\Phi}(t,\vec{x}),\dot{\mathbf{\Phi}}^\dagger(t,\vec{y})\right]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}),$$
$$\left[\mathbf{\Phi}^\dagger(t,\vec{x}),\mathbf{\Pi}^\dagger(t,\vec{y})\right]=\left[\mathbf{\Phi}^\dagger(t,\vec{x}),\dot{\mathbf{\Phi}}(t,\vec{y})\right]=\mathrm{i}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

- Hamilton-operator (CAVEAT: Operatorordnungsproblem!)

$$\mathbf{H}=\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3x\,\mathscr{H}(t,\vec{x})=\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3x\left[\dot{\mathbf{\Phi}}(t,\vec{x})\mathbf{\Pi}(t,\vec{x})+\dot{\mathbf{\Phi}}^\dagger(t,\vec{x})\mathbf{\Pi}^\dagger(t,\vec{x})-\mathscr{L}\right]$$
$$=\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3x\left[\left(\partial_t\mathbf{\Phi}^\dagger(t,\vec{x})\right)(\partial_t\mathbf{\Phi}(t,\vec{x}))+\left(\vec{\nabla}\Phi^\dagger(t,\vec{x})\right)\left(\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x})\right)+m^2\mathbf{\Phi}^\dagger(t,\vec{x})\mathbf{\Phi}(t,\vec{x})\right].$$

  – NB: $\mathscr{H}$ stimmt mit (quantisierter) Energiedichte $\varepsilon=\Theta^{00}$ kanonischer Energie-Impuls-Operator vom Noether-Theorem überein
  – $\Rightarrow$ $\mathbf{H}$ repräsentiert Energie

- Bewegungsgleichungen

$$\partial_t\mathbf{\Phi}(t,\vec{x})=\frac{1}{\mathrm{i}}[\mathbf{\Phi}(t,\vec{x}),\mathbf{H}],$$
$$\partial_t\mathbf{\Pi}(t,\vec{x})=\frac{1}{\mathrm{i}}[\mathbf{\Phi}(t,\vec{x}),\mathbf{H}].$$

  – und entsprechend für $\mathbf{\Phi}^\dagger$ und $\mathbf{\Pi}^\dagger$
  – mit kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$(\Box+m^2)\mathbf{\Phi}=(\Box+m^2)\mathbf{\Phi}^\dagger=0.$$

  – Feldoperatoren erfüllen Klein-Gordon-Gleichung

- Lösungen der Operatorfeldgleichungen

  – völlig analog zu klassischen Gleichungen (da lineare Gleichungen)
  – verwende Resultate von Übung Sheet 5

- Moden-Funktionen

$$u_{\vec{p}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}} \exp(-\mathrm{i}\underline{x}\cdot\underline{p})|_{p^0=E_p}, \quad E_p = \sqrt{m^2+\vec{p}^2}$$

- Normierungskonvention (NB: $(\Phi_1, \Phi_2)$ indefinite Bilinearform!)

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \Phi_1 \overleftrightarrow{\partial_t} \Phi_2, \quad (u_{\vec{p}}, u_{\vec{q}}) = (u^*_{\vec{p}}, u^*_{\vec{q}}) = 0, \quad (u^*_{\vec{p}}, u_{\vec{q}}) = -(u_{\vec{q}}, u^*_{\vec{p}}) = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})$$

- Moden-Zerlegung des Feldoperators

$$\mathbf{\Phi}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p} [\mathbf{a}(\vec{p}) u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) u^*_{\vec{p}}(\underline{x})]$$

- Kommutatorregeln für $\mathbf{a}(\vec{p})$ und $\mathbf{b}(\vec{p})$

$$\mathbf{a}(\vec{p}) = (u_{\vec{p}}, \mathbf{\Phi}), \quad \mathbf{b}(\vec{p}) = (u_{\vec{p}}, \mathbf{\Phi})$$

- mit gleichzeitigen Kommutatorrelationen der Felder

$$\begin{aligned}&\left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}(\vec{q})\right] = \left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})\right] = \left[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})\right] = \left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})\right] = 0,\\ &\left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q})\right] = \left[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})\right] = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\end{aligned}$$

- potentiell Probleme mit $\delta$-Distributionen

- Regularisierung: endliches Volumen
  - die $\delta$-Distribution ist problematisch (kontinuierliche Impulse, $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$)
  - „Teilchen“ in endlichem Würfel der Kantenlänge $L$
  - möchte selbstadjungierten Operator $-\mathrm{i}\vec{\nabla}$ (Impuls in der 1. Quantisierung) $\Rightarrow$ periodische Randbedingungen

$$\mathbf{\Phi}(t, \vec{x} + L\vec{n}) = \mathbf{\Phi}(t, \vec{x}), \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3$$

  - Modenentwicklung wie im $\mathbb{R}^3$ aber auf $\vec{x} \in V = [0, L]^3$ beschränkt $\Rightarrow$ Fourier-Reihe statt Fourier-Integral

$$\vec{p} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3, \quad \mathbf{\Phi}(\underline{x}) = \sum_{\vec{p}} \left[\mathbf{a}(\vec{p}) u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p}) u^*_{\vec{p}}(\underline{x})\right]$$

– Modenfunktionen

$$u_{\vec{p}}(\underline{x}) = N(\vec{p}) \exp(-\mathrm{i}\underline{p} \cdot \underline{x})|_{p^0=E_{\vec{p}}=\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}$$

– Normierung

$$(u^*_{\vec{p}}, u_{\vec{q}}) = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, u^*_{\vec{p}}(\underline{x}) \overleftrightarrow{\partial_t}\, u_{\vec{q}}(\underline{x}) \stackrel{!}{=} \delta_{\vec{p},\vec{q}} \Rightarrow N(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{V2E_{\vec{p}}}}$$
$$u_{\vec{p}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{V2E_{\vec{p}}}} \exp(-\mathrm{i}\underline{p} \cdot \underline{x})|_{p^0=E_{\vec{p}}=\sqrt{m^2+\vec{p}^2}}$$

– analog wie im $\mathbb{R}^3$: Kommutatorrelationen

$$\left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}(\vec{q})\right] = \left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})\right] = \left[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}(\vec{q})\right] = \left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})\right] = 0,$$
$$\left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q})\right] = \left[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})\right] = \delta_{\vec{p},\vec{q}} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \vec{p} = \vec{q}, \\ 0 & \text{für} \quad \vec{p} \neq \vec{q}. \end{cases}$$

– unendlich viele unabhängige harmonische Oszillatoren
– $\mathbf{a}(\vec{p})$ und $\mathbf{b}(\vec{p})$ vernichten Oszillatoranregungen mit Impuls $\vec{p}$
– $\mathbf{a}^\dagger(\vec{p})$ und $\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})$ erzeugen Oszillatoranregungen mit Impuls $\vec{p}$
– $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ verschiedenartige Anregungen
– $\mathbf{N}_a(\vec{p}) = \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p})$ Anzahloperator für „$a$-Anregungen“
– $\mathbf{N}_b(\vec{p}) = \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})$ Anzahloperator von „$b$-Anregungen“
– verallgemeinertes VONS: Vakuumzustand (keine Anregungen):

$$\forall \vec{p}: \quad \mathbf{a}(\vec{p})|\Omega\rangle = \mathbf{b}(\vec{p})|\Omega\rangle = 0$$

– Besetzungszahldarstellung: VONS von gemeinsamen Eigenvektoren von $\mathbf{N}_a(\vec{p})$ und $\mathbf{N}_b(\vec{p})$ mit Eigenwerten $N_a(\vec{p}), N_b\vec{p} \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\left|\{N_a(\vec{p}), N_b(\vec{p})\}\right\rangle = \prod_{\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{N_a(\vec{p})!N_b(\vec{p}!)}}\, \mathbf{a}^{\dagger N_a(\vec{p})(\vec{p})} \mathbf{b}^{\dagger N_b(\vec{p})(\vec{p})} |\Omega\rangle$$

- Teilcheninterpretation:
  – Zustände invariant unter Vertauschung beliebiger $\vec{p}_k \Rightarrow$ Teilchen Bosonen
  – Teilchen in (relativistischer *und* nichtrelativistischer) QT nicht individualisierbar

– Teilchensorten nur unterscheibar durch intrinsische „Quantenzahlen“: Masse, Spin $s \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$, Ladung(en)

– gleichartige Teilchen in Raumdimensionen $d \geq 3$:

  * Bosonen (Zustände ändern sich nicht unter Vertauschung belieber Teilchenpaare)
  * Fermionen (Zustände ändern *Vorzeichen* unter Vertauschung belieber Teilchenpaare)

- Energie und Impuls

  – from Noether's theorem: kanonischer Energie-Impulstensor (s. Übungen Sheet 5)

  – quantisiert: CAVEAT: Operatorordnungsproblem!

$$\mathbf{\Theta}^{\mu\nu} = (\partial^\mu \mathbf{\Phi}^\dagger)(\partial^\nu \mathbf{\Phi}) + (\partial^\mu \mathbf{\Phi})(\partial^\nu \mathbf{\Phi}^\dagger) - \mathscr{L}\eta^{\mu\nu}$$

  – Energie- und Impulsdichteoperatoren

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{\Theta}^{00} = (\partial_t \mathbf{\Phi})^\dagger (\partial_t \mathbf{\Phi}) + (\vec{\nabla}\mathbf{\Phi}^\dagger)\cdot(\vec{\nabla}\mathbf{\Phi}) + m^2 \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi},\\ \vec{\mathbf{g}} &= -(\partial_t \mathbf{\Phi}^\dagger)(\vec{\nabla}\mathbf{\Phi}) - (\vec{\nabla}\mathbf{\Phi}^\dagger)(\partial_t \mathbf{\Phi}).\end{aligned}$$

  – Gesamt-Energie und -Impuls

$$\underline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix}\mathbf{H}\\ \vec{\mathbf{P}}\end{pmatrix} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x} \begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}(t,\vec{x})\\ \vec{\mathbf{g}}(t,\vec{x})\end{pmatrix} = \sum_{\vec{p}} \begin{pmatrix}E_{\vec{p}}\\ \vec{p}\end{pmatrix} [\mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})]$$

  – Operatorordnungsproblem ergibt unendlichen Vakuumbeitrag

$$\langle \Omega | \underline{\mathbf{P}} | \Omega \rangle = \sum_{\vec{p}} \begin{pmatrix}E_{\vec{p}}\\ \vec{p}\end{pmatrix}$$

  – $\left[\mathbf{b}(\vec{p}), \mathbf{b}^\dagger(\vec{q})\right] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ (c-Zahl!)

  – Normalordnung ändert bis auf eine divergierende c-Zahl-Konstante Energie- und Impulsoperatoren nicht:

$$:\underline{\mathbf{P}} := \int_V \mathrm{d}^3\vec{x} \begin{pmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}(t,\vec{x})\\ \vec{\mathbf{g}}(t,\vec{x})\end{pmatrix} = \sum_{\vec{p}} \begin{pmatrix}E_{\vec{p}}\\ \vec{p}\end{pmatrix} [\mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})]$$

  – Normalordnungsvorschrift für Funkionen der Feldoperatoren: $:\mathscr{A}(\underline{x}):$

    * schreibe $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Phi}^\dagger$ mit Erzeuger- und Vernichteroperatoren (Modenentwicklung)
    * ordne alle Erzeuger ganz nach links und alle Vernichter ganz nach rechts
    * vernachlässige c-Zahl-Kommutatoren zwischen Erzeugern und Vernichtern

- QFT löst Probleme der 1. Quantisierung:
  - Hamilton-Operator beschränkt nach unten: Gesamtenergieeigenwerte $E \geq 0$
  - Vakuum (keine Feldanregungen $\hat{=}$ keine Teilchen):

$$\underline{\mathbf{P}}\,|\Omega\rangle = 0$$

  - Moden mit positiver (negativer) Frequenz: Vernichter (Erzeuger) in Modenentwicklung (Feynman-Stueckelberg-Trick)
  - $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$: verschiedene Teilchenarten mit gleicher Masse
  - intrinsische Quantenzahl zur Unterscheidung zwischen „$a$- und $b$-Teilchen"?

- Ladungsquantenzahl
  - Lagrangian invariant unter Phasenumdefinition der Felder bzw. Feldoperatoren

$$\mathbf{\Phi}'(\underline{x}) = \exp(-\mathrm{i}q\alpha)\mathbf{\Phi}(\underline{x}), \quad \mathbf{\Phi}'^\dagger(\underline{x}) = \exp(+\mathrm{i}q\alpha)\mathbf{\Phi}^\dagger(\underline{x}),$$

  - $q, \alpha \in \mathbb{R}$
  - Noether: erhaltene Ladung (s. Übungen Blatt 4)
  - wende gleich Normalordnung an!

$$\mathbf{j}_\mu(\underline{x}) = \mathrm{i}q : \mathbf{\Phi}^\dagger(\underline{x})\overleftrightarrow{\partial_\mu}\mathbf{\Phi} := \mathrm{i}q : \left[\mathbf{\Phi}^\dagger(\underline{x})\partial_\mu\mathbf{\Phi}(\underline{x}) - \left(\partial_\mu\mathbf{\Phi}^\dagger(\underline{x})\right)\right]:$$

  - Erhaltung der entsprechenden Ladung

$$\mathbf{Q} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\mathbf{j}^0(\underline{x}) = q\sum_{\vec{p}}\left[\mathbf{N}_a(\vec{p}) - \mathbf{N}_b(\vec{p})\right]$$

  - $a$-Teilchen trägt erhaltene Ladung $q$, $b$-Teilchen $(-q)$

– $b$-Teilchen ist Antiteilchen von $a$-Teilchen (und vice versa)
– Spezialfall: strikt neutrales Teilchen $\Leftrightarrow \mathbf{b}(\vec{p}) = \mathbf{a}(\vec{p}) \Leftrightarrow \mathbf{\Phi}^\dagger(\underline{x}) = \mathbf{\Phi}(\underline{x})$ $\Leftrightarrow \mathbf{j}_\mu \equiv 0,\ \mathbf{Q} \equiv 0$

- Zurück zum $\mathbb{R}^3$ („$V$, $L \to \infty$")
  – für $L \to \infty$: diskrete $\vec{p} \in 2\pi\vec{n}/L$ mit $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$ rücken immer enger zusammen
  – in Impulsvolumen $\Delta^3\vec{p}$ sind $\Delta^3\vec{n} = \Delta^3(\vec{p})V/(2\pi)^3$ Zustände
  – damit ergibt sich Limes für „Fourier-Summen" → „Fourier-Integral"

$$\int_V \mathrm{d}^3\vec{x} \to \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}, \quad \sum_{\vec{p}} \to V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3}$$

  – geht man auch zu den ursprünglichen Modenfunktionen mit

$$N(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{V 2E_{\vec{p}}}} \to \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}}$$

  zurück, folgt in Modenentwicklung

$$\sum_{\vec{p}} \to \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}$$

  – NB: durch Normalordnung keine Probleme mehr mit

$$\underline{\mathbf{P}} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p} \begin{pmatrix} E_p \\ \vec{p} \end{pmatrix} \left[\mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})\right].$$

  – $\mathbf{N}_a(\vec{p}) = \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{a}(\vec{p})$ und $\mathbf{N}_b(\vec{p}) = \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})\mathbf{b}(\vec{p})$ repräsentieren jetzt Teilchen*dichte* pro Impulsvolumen:

$$\left[\mathbf{a}(\vec{p}), \mathbf{a}^\dagger(\vec{q})\right] = \mathrm{i}\delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p})$$

- Diskrete Symmetrien
  – Wigner-Theorem: Symmetrietransformationen immer stets durch unitären oder antiunitären Operator auf Hilbert-Raum realisiert [Got89]

$$\begin{aligned} &\mathbf{U} \quad \text{unitär:} \quad \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{U}(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1\mathbf{U}|\psi_1\rangle + \lambda_2\mathbf{U}|\psi_2\rangle) \\ &\mathbf{U} \quad \text{antiunitär:} \quad \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{U}(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1^*\mathbf{U}|\psi_1\rangle + \lambda_2^*\mathbf{U}|\psi_2\rangle) \end{aligned}$$

- für stetig mit $\mathbb{1}$ zusammenhängend immer unitär
- für diskrete Symmetrien: kann auch antiunitär realisiert sein

- Raumspiegelungen
  - Klein-Gordon-Gleichung auch invariant unter Raumspiegelungen

$$\hat{P}\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

  - zuerst für geladene Klein-Gordon-Felder
  - dann kann man Phasenfaktoren in der Definition von $\mathbf{P}$ mittels $\mathbf{Q}$ wegtransformieren $\Rightarrow$ alle Realisierungen mit beliebigen Phasenfaktoren $\eta_P$

$$\mathbf{P}\mathbf{\Phi}(\underline{x})\mathbf{P} = \eta_P \mathbf{\Phi}(\hat{P}\,\underline{x})$$

    äquivalent
  - setze im folgenden: $\eta_P = 1$
  - versuche zuerst Realisierung mit unitärem Operator
  - soll sich unter $\hat{P}$ als Skalarfeld, also analog wie unter $\mathrm{SO}(1,3)^{\uparrow}$-Transformationen verhalten

$$\mathbf{P}\mathbf{\Phi}(\underline{x})\mathbf{P}^{\dagger} = \mathbf{\Phi}(\hat{P}\,\underline{x}) \;\Rightarrow\; \mathbf{P}\,\mathbf{P} = \mathbb{1}$$

  - Wirkung auf Erzeuger-Vernichter-Operatoren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\mathbf{\Phi}(\underline{x})\mathbf{P}^{\dagger} &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{P}\,\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{P}^{\dagger}\,u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{P}\,\mathbf{b}^{\dagger}(\vec{p})\mathbf{P}^{\dagger}\,u^*_{\vec{p}}(\underline{x})\right] \hat{=} \mathbf{\Phi}(\hat{P}\,\underline{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{a}(\vec{p})u_{\vec{p}}(\hat{P}\,\underline{x}) + \mathbf{b}^{\dagger}(\vec{p})u^*_{\vec{p}}(\hat{P}\,\underline{x})\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{a}(\vec{p})u_{-\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^{\dagger}(\vec{p})u^*_{-\vec{p}}\underline{x})\right] \quad (\text{substitutiere } \vec{p} \to -\vec{p}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{a}(-\vec{p})u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^{\dagger}(-\vec{p})u^*_{\vec{p}}\underline{x})\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}\,\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{P}^{\dagger} = \mathbf{a}(-\vec{p}), \quad \mathbf{P}\,\mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{P}^{\dagger} = \mathbf{b}(-\vec{p})$$

  - erwartetes Verhalten aus klassischer Physik: $\vec{p} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t \mapsto -\vec{p}$

- Raumspiegelung für ungeladene Klein-Gordon-Felder

- $\mathbf{\Phi}^\dagger = \mathbf{\Phi}$: keine unitäre Phasenumdefinitionstransformation mehr ($\hat{Q} = 0$)
- $\eta_P = 1$ („skalares Feld“) oder $\eta_P = -1$ (pseudoskalares Feld)

- Klein-Gordon-Gleichung auch invariant unter Zeitspiegelungen

$$\hat{T}\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}\mathbf{\Phi}(\underline{x})\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{\Phi}(\hat{T}\,\underline{x})$$

  - kann wieder $\eta_T = 1$ setzen
  - unitäre Realisierung führt auf Widersprüche mit Modenentwicklung! (Übung!)

  - antiunitäre Realisierung funktioniert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}\Phi(\underline{x})\mathbf{T}^\dagger &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{T}\,\mathbf{a}(\vec{p})u_{\vec{p}}(\underline{x})\mathbf{T}^\dagger + \mathbf{T}\,\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})u^*_{\vec{p}}(\underline{x})\mathbf{T}^\dagger\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{T}\,\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{T}^\dagger u^*_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{T}\,\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{T}^\dagger u_{\vec{p}}(\underline{x})\right] \hat{=} \mathbf{\Phi}(\hat{T}\,\underline{x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{a}(\vec{p})u_{\vec{p}}(\hat{T}\,\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})u^*_{\vec{p}}(\hat{T}\,\underline{x})\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{a}(\vec{p})u^*_{-\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(\vec{p})u_{-\vec{p}}(\underline{x})\right] \quad (\text{substitutiere } \vec{p} \to -\vec{p}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{a}(-\vec{p})u^*_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{b}^\dagger(-\vec{p})u_{\vec{p}}(\underline{x})\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}\,\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{a}(-\vec{p}), \qquad \mathbf{T}\,\mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{b}(-\vec{p})$$

  - CAVEAT: Bzgl. Wirkung auf Erzeuger und Vernichter sieht $\mathbf{T}$ wie $\mathbf{P}$ aus aber $\mathbf{T}$ *anti*unitär und $\mathbf{P}$ unitär!

- auch invariant unter Vertauschung von Teilchen mit Anti-Teilchen: Ladungskonjugation
- unitäre Transformation

$$\mathbf{C}\,\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{b}(\vec{p}), \qquad \mathbf{C}\,\mathbf{b}(\vec{p})\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{a}(\vec{p}),$$

- Wirkung auf Felder

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(\underline{x})\mathbf{C}^\dagger &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{C}\,\mathbf{a}(\vec{p})\mathbf{C}^\dagger u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{C}\mathbf{b}^\dagger(\vec{p})\mathbf{C}^\dagger u^*_{\vec{p}}(\underline{x})\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{p}\left[\mathbf{b}(\vec{p})u_{\vec{p}}(\underline{x}) + \mathbf{a}^\dagger(\vec{p})u^*_{\vec{p}}(\underline{x})\right] = \mathbf{\Phi}^\dagger(\underline{x})\end{aligned}$$

- $\Rightarrow \mathbf{C}^2 = \mathbb{1}$
- für strikt neutrales Klein-Gordon-Teilchen: $\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{\Phi} \Leftrightarrow$ Teilchen $\equiv$ Antiteilchen

- CPT
  - $\mathbf{\Theta} := \mathbf{C}\,\mathbf{P}\,\mathbf{T}$ (*anti*unitär): $\mathbf{\Theta}\mathbf{\Phi}(\underline{x})\mathbf{\Theta}^\dagger = \mathbf{\Phi}^\dagger(\hat{P}\,\hat{T}\,\underline{x}) = \mathbf{\Phi}^\dagger(-\underline{x})$
  - Wirkung invariant unter CPT-Trafo!
  - es gilt allgemein, dass jede lokale QFT mit selbstadjungierter Lorentz-invarianter Lagrange-Dichte und bei Gültigkeit des Spin-Statistik-Theorems auch CPT-invariant ist
  - empirisch bis dato hervorragend bestätigt
  - CPT-Theorem von Pauli (1955), Lüders (1957) bewiesen

# 3 Bibliography

**Bibliography**

## Literatur

[BR50] N. Bohr and L. Rosenfeld, Field and Charge Measurements in Quantum Electrodynamics, Phys. Rev. **78**, 794 (1950), `https://link.aps.org/abstract/PR/v78/i6/p794`.

[Col18] S. Coleman, *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack (2018), `https://doi.org/10.1142/9371`.

[GC08] J. Garrison and R. Chiao, *Quantum optics*, Oxford University Press, New York (2008), `https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198508861.001.0001`.

[Got89] K. Gottfried, *Quantum Mechanics, Volume 1: Fundamentals*, CRC Press Taylor&Francis Group, Boca Raton (1989).

[GR96] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, Berlin, Heidelberg (1996), `https://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-61485-9`.

[Hob13] A. Hobson, There are no particles, there are only fields, Am. Jour. Phys. **81**, 211 (2013), `https://doi.org/10.1119/1.4789885`.

[Hob24] A. Hobson, *Fields and Their Quanta*, Springer, Cham (2024), `https://doi.org/10.1007/978-3-031-72613-2`.

[Lec18] K. Lechner, *Classical Electrodynamics*, Springer International Publishing AG, Cham (2018), `https://doi.org/10.1007/978-3-319-91809-9`.

[Leu65] H. Leutwyler, A no-interaction theorem in classical relativistic Hamiltonian particle mechanics, Nuovo Cim. **37**, 556 (1965), `https://doi.org/10.1007/BF02749856`.

[LL91] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 4, Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1991).

[Nak13] C. Nakhleh, The Lorentz-Dirac and Landau-Lifshitz equations from the perspective of modern renormalization theory, Am. J. Phys **81**, 180 (2013), `https://dx.doi.org/10.1119/1.4773292`.

[Pes79] M. E. Peskin, Short Distance Analysis for Heavy Quark Systems. 1. Diagrammatics, Nucl. Phys. B **156**, 365 (1979), `https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90199-8`.

[Roh07] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai (2007).

[SZ97] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (1997).