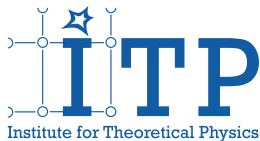


Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 5: Spezielle Relativitätstheorie und klassische Felder

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt



Outline

Spezielle Relativitätstheorie

Kovariante Elektrodynamik

Wirkungsprinzip für Felder

Noether-Theorem

Bibliography

Spezielle Relativitätstheorie

Literatur: [Sch87, SU01, LL92, Hee24, Ein09, Ein05]

Spezielle Relativitätstheorie

- ▶ Historie: **Maxwell-Elektrodynamik** nicht kovariant unter „Galilei-Boosts“
- ▶ Lösung: Poincaré, Lorentz, **Einstein**: spezielle Relativitätstheorie
 - ▶ **spezielles Relativitätsprinzip (Newton I)** gültig
 - ▶ Lichtgeschwindigkeit **unabhängig von Relativbewegung zwischen Quelle und Empfänger**
 - ▶ Physikalische Gesetze (einschließlich Elektrodynamik!) gleich in allen **Inertialsystemen**
 - ▶ **Minkowski-Raum-Zeit**: neues Raum-Zeit-Modell
- ▶ klassische relativistische Physik
 - ▶ klassische **Punktteilchenmechanik**: (problematisch wegen **Strahlungsrückwirkung**)
 - ▶ klassische **Elektrodynamik**: paradigmatisches Beispiel für **klassische relativistische Feldtheorie**
 - ▶ klassische **Kontinuumsmechanik**: auch **klassische Feldtheorie**: keine Probleme mit Strahlungsrückwirkung!
 - ▶ **Gravitation** $\Rightarrow$ **Allgemeine Relativitätstheorie**
- ▶ natürliche Formulierung der klassischen relativistischen Physik: **Feldtheorien (lokale Wechselwirkungen)**

Spezielle Relativitätstheorie

- ▶ im Folgenden: **natürliche Einheiten**: $c = 1$ ($\hbar = k_B = 1$)
- ▶ **Minkowski-Raumzeit**
 - ▶ **Vierervektoren**: $\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$

$$\underline{x} = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \text{ (kontravariante Komponenten), } x^0 = c t = t.$$

- ▶ **Minkowski-Produkt**: Einstein-Summenkonvention
(summiere über doppelt auftretende **gegenständige** Indizes)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \underline{x} \cdot \underline{y} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \underline{x}^T \hat{\eta} \underline{y}, \quad \hat{\eta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

- ▶ kovariante Vektorkomponenten

$$(x_\mu) = \hat{\eta} \underline{x} = (\eta_{\mu\nu} x^\nu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \quad (\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \hat{\eta}$$

Spezielle Relativitätstheorie

► Lorentz-Transformationen

- „pseudo-kartesische Basis“: $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$
- Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen

$$\mathbf{e}'_\mu = \mathbf{e}_\rho \Lambda^\rho{}_\mu$$

pseudo-kartesisch

- Bedingung

$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}'_\nu = \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\sigma \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \Leftrightarrow \hat{\Lambda}^T \hat{\eta} \hat{\Lambda} = \hat{\eta}$$

- wegen $\hat{\eta}^2 = \mathbb{1}$:

$$(\hat{\eta} \hat{\Lambda}^T \hat{\eta}) \hat{\Lambda} = \mathbb{1} \Rightarrow \hat{\eta} \hat{\Lambda}^T \hat{\eta} = \hat{\Lambda}^{-1}$$

- $\hat{\Lambda}$ „pseudo-orthogonale Matrix“

Spezielle Relativitätstheorie

► Drehungsfreier Lorentz-Boost in 1-Richtung

► $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$:

$$\hat{\Lambda}_B(\eta, \vec{e}_1) = (\underline{e}'_0, \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3) = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

► $\mathbf{e}'_\mu \cdot \mathbf{e}'_\nu = \eta_{\mu\nu}$:

$$A^2 - C^2 = 1, \quad B^2 - D^2 = -1, \quad AB - CD = 0.$$

► $\mathbf{e}'_0$ soll in „Vorwärtszeitrichtung“ zeigen: $A > 0$

$$A = \cosh \eta, \quad B = \sinh \eta, \quad C = \sinh \eta, \quad D = \cosh \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = x'^\mu \mathbf{e}'_\mu = x'^\mu \Lambda^\rho{}_\mu \mathbf{e}_\rho \Rightarrow \underline{x} = \hat{\Lambda} \underline{x}' \Rightarrow \underline{x}' = \hat{\Lambda}^{-1} \underline{x}$$

Spezielle Relativitätstheorie

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \cosh \eta - x^1 \sinh \eta \\ -x^0 \sinh \eta + x^1 \cosh \eta \end{pmatrix}.$$

- Bewegung des Ursprungs von Σ' bzgl. Σ

$$x'^1 = 0 \Rightarrow x^1 = \tanh \eta x^0 = \tanh \eta t \Rightarrow v = \tanh \eta = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta}.$$

- $1 - v^2 = 1 - \tanh^2 \eta = (\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) / \cosh^2 \eta = 1 / \cosh^2 \eta$

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma, \quad \sinh \eta = \tanh \eta \cosh \eta = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

- Lorentz-Boost in x^1 -Richtung

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x^0 - v x^1 \\ x^1 - v x^0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} t - v x^1 \\ x^1 - v t \end{pmatrix}$$

Spezielle Relativitätstheorie

- ▶ in SI-Einheiten:

$$\begin{pmatrix} c t' \\ x'^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} c t - v/c x^1 \\ x^1 - v t \end{pmatrix} \Big|_{|v/c| \ll 1} \approx \begin{pmatrix} c t \\ x^1 - v t \end{pmatrix}$$

- ▶ für $|v/c| \ll 1 \Rightarrow$ **Galilei-Boost**

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v} t$$

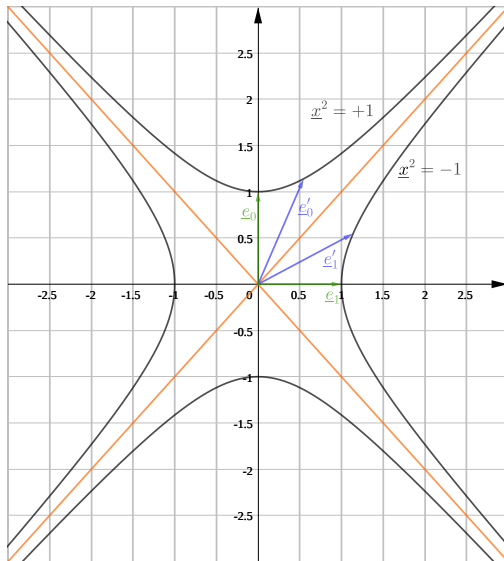
- **Drehungsfreier Lorentz-Boost** in beliebiger Richtung $\vec{n}$:

$$\hat{\Lambda}_B(\eta, \vec{n}) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \vec{n}^T \\ \sinh \eta \vec{n} & (\cosh \eta - 1) \vec{n} \vec{n}^T + \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}$$

- $\Lambda_B^{-1}(\eta, \vec{n}) = \Lambda_B(-\eta, \vec{n})$

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= \begin{pmatrix} x'^0 \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \hat{\Lambda}_B^{-1}(\eta, \vec{n}) \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \cosh \eta - \vec{n} \cdot \vec{x} \sinh \eta \\ -x^0 \sinh \eta \vec{n} + \vec{x} + (\cosh \eta - 1)(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma(t - \vec{v} \cdot \vec{x}) \\ \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{v} t) + \vec{x}_{\perp} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{x}_{\parallel} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}), \quad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}. \end{aligned}$$

Spezielle Relativitätstheorie



Spezielle Relativitätstheorie

► Minkowski-Geometrie

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$: zeitartig
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$: lichtartig
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$: raumartig

► Lorentz-Gruppe

- **Lorentz-Gruppe** $O(1,3)$: $\hat{\Lambda} \in O(1,3) \Leftrightarrow \hat{\Lambda}^{-1} = \hat{\eta} \hat{\Lambda}^T \hat{\eta}$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2 \in O(1,3) \Rightarrow (\hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2)^{-1} &= \hat{\Lambda}_2^{-1} \hat{\Lambda}_1^{-1} = (\hat{\eta} \hat{\Lambda}_2^T \hat{\eta})(\hat{\eta} \hat{\Lambda}_1^T \hat{\eta}) = \hat{\eta}(\hat{\Lambda}_2^T \hat{\Lambda}_1^T) \hat{\eta} = \hat{\eta}(\hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2)^T \hat{\eta} \\ &\Rightarrow \hat{\Lambda}_1 \hat{\Lambda}_2 \in O(1,3)\end{aligned}$$

- $\det \hat{\Lambda}^{-1} = 1 / \det \hat{\Lambda} = (\det \hat{\eta})^2 \det \hat{\Lambda}^T = \det \hat{\Lambda} \Rightarrow (\det \hat{\Lambda})^2 = 1 \Rightarrow \det \hat{\Lambda} \in \{1, -1\}$
- **Spezielle Lorentz-Gruppe**: $\hat{\Lambda} \in O(1,3)$ und $\det \hat{\Lambda} = +1$: $\hat{\Lambda} \in SO(1,3)$ (Untergruppe)

Spezielle Relativitätstheorie

- ▶ $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda^0_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0_0 \leq -1$
- ▶ $\hat{\Lambda} \in O(1,3)$ und $\Lambda^0_0 \geq 1$ bilden Untergruppe $O(1,3)^\uparrow$ (**orthochrone Lorentz-Gruppe**)
- ▶ $\hat{\Lambda} \in O(1,3)^\uparrow$: Zeitrichtung **zeit- oder lichtartiger Vektoren** ungeändert
- ▶ $\Rightarrow$: kausal verknüpfte Ereignisse müssen **zeit- oder lichtartig zueinander liegen**
- ▶ $\hat{\Lambda} \in SO(1,3)$ und $\Lambda^0_0 \geq 1$: Untergruppe $SO(1,3)^\uparrow$
(**eigentlich orthochrone Lorentz-Gruppe**)
- ▶ $SO(1,3)^\uparrow$: hängt stetig mit $\mathbb{1}$ zusammen

Spezielle Relativitätstheorie

► Relativistische Mechanik

- **freies Teilchen**: Symmetrie unter Zeittranslationen, Raumtranslationen und Rotationen wie in Galilei-Newton-Mechanik
- **Noether-Symmetrie**: Lagrange-Funktion [Hee18, Hee25]

$$L = L(\vec{v}^2)$$

- Wirkung muss **Lorentz-Invariante** sein

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\dot{\vec{x}}^2) = - \int_{t_1}^{t_2} dt m \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}$$

- $d\tau^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$: **Lorentz-invariant**
- $d\tau$: infinitesimales Zeitintervall gemessen im **momentanem Ruhesystem des Teilchens**: τ **Eigenzeit**

Spezielle Relativitätstheorie

► Euler-Lagrange-Gleichungen

$$L = -m\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2} \Rightarrow \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} = m\gamma\dot{\vec{x}} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau},$$

$$\dot{\vec{p}} \stackrel{\text{ELG}}{=} \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0.$$

► $\partial_t L = 0 \Rightarrow H = E = \text{const}$

$$E = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = m\gamma\dot{\vec{x}}^2 + m/\gamma = \frac{m}{\gamma}(\gamma^2\dot{\vec{x}}^2 + 1) = \frac{m}{\gamma}\left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{1 - \dot{\vec{x}}^2} + 1\right) = m\gamma \Rightarrow \gamma = \text{const}$$

► $\vec{p} = m\gamma\dot{\vec{x}} = \text{const} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \vec{v} = \text{const}$

Spezielle Relativitätstheorie

- ▶ m : **invariante Masse (Lorentz-Skalar)**
- ▶ $d\tau = dt \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} = dt/\gamma$
- ▶ Vierer-Geschwindigkeit (**Vierervektor**)

$$\underline{u} = d_\tau \underline{x} = \frac{dt}{d\tau} \dot{\underline{x}} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad \underline{u} \cdot \underline{u} = \gamma^2(1^2 - v^2) = \gamma^2(1 - v^2) = 1 = \text{const}$$

- ▶ **Vierer-Impulsvektor**

$$\underline{p} = m \underline{u} = \begin{pmatrix} m\gamma \\ m\gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{p} \cdot \underline{p} = m^2 = E^2 - \vec{p}^2$$

- ▶ **relativistische Energie-Impuls-Beziehung**

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} = m \sqrt{1 + \vec{p}^2/m^2}$$

Spezielle Relativitätstheorie

► Nichtrelativistischer Limes

► $|\vec{p}| \ll mc$

$$E \simeq m \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2} \right) = m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

- nichtrelativistische Energie-Impulsbeziehung (modulo **Ruheenergie** $E_0 = mc^2$)
- **veraltet: „relativistische Masse“** $m_{\text{rel}} = \gamma m$
- Einstein 1948: „sollte nicht mehr verwendet werden!“ [Oku89]
- Verwirrung stammt aus 1. Paper zur SRT von 1905
- dort Punktmechanik noch nicht vollständig formuliert
- Planck 1906 [Pla06]

Kovariante Elektrodynamik

Literatur: [\[LL92, Jac14\]](#)

Kovariante Elektrodynamik

- ▶ Punktladung im äußeren elektromagnetischen Feld
- ▶ Elektrodynamik mit Skalar- und Vektorpotentialen
- ▶ physikalische Felder (im üblichen 3er-Formalismus)

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \Phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- ▶ Suche relativistisch invarianten Beitrag L_{int}
- ▶ fasse Potentiale zu Vierervektorfeld $(A^\mu) = (\Phi, \vec{A})^T$ zusammen
- ▶ Ladung q als Kopplungsstärke
- ▶ kovarianter Wechselwirkungsbeitrag zur Wirkung

$$dS_{\text{int}} = -q dx^\mu A_\mu$$

Kovariante Elektrodynamik

- ▶ Wirkung

$$S[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2} - q \dot{x}^\mu A_\mu(\underline{x}) \right]$$

- ▶ NB: **Lokalität der Wechselwirkung**: in L geht das em. Feld entlang der **Weltlinie** $x^\mu(t)$ ein, also stets am **momentanen Ort des Teilchens**

$$L = -m \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2} - q[A_0(t, \vec{x}) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(t, \vec{x})]$$

- ▶ **Kanonischer Impuls**

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\gamma \dot{\vec{x}} + q\vec{A}(t, \vec{x})$$

- ▶ **kanonischer Impuls** nicht mechanischer Impuls $\vec{p}_{\text{mech}} = m\gamma \dot{\vec{x}}!$

Kovariante Elektrodynamik

- **Bewegungsgleichungen** (beachte: $A_0 = A^0 = \Phi$, $A^j = -A_j$, $B^j = \epsilon^{jkl} \partial_k A^l$)

$$\begin{aligned}\dot{p}^j &= \dot{p}_{\text{mech}}^j - q \partial_t A_j + \dot{x}^k \partial_k A_j = \frac{\partial L}{\partial x^j} = -q \partial_j A_0 + q \dot{x}^k \partial_j A_k \\ \dot{p}_{\text{mech}}^j &= q(-\partial_t A^j - \partial_j \Phi) + q \dot{x}^k (\partial_j A^k - \partial_k A^j) \\ &= q E^j + q \epsilon^{jkl} \dot{x}^k B^l = q[E^j + (\dot{\vec{x}} \times \vec{B})^j]\end{aligned}$$

- nicht **manifest kovariant**
- Vierdimensionale Ergänzung und Ableitung nach **Eigenzeit** mit $d_\tau = \gamma d_t$
- Viererimpuls

$$p_{\text{mech}}^\mu = m d_\tau x^\mu = m \gamma d_t x^\mu = \begin{pmatrix} m\gamma \\ \vec{p}_{\text{mech}} \end{pmatrix}$$

- allerdings nur **3 unabhängige Komponenten**:

$$\underline{p}_{\text{mech}} \cdot \underline{p}_{\text{mech}} = m^2 \Rightarrow \underline{p}_{\text{mech}} \cdot d_\tau \underline{p}_{\text{mech}} = 0 \Rightarrow p_{\text{mech}}^0 d_\tau p_{\text{mech}}^0 = \vec{p}_{\text{mech}} \cdot d_\tau \vec{p}_{\text{mech}}.$$

Kovariante Elektrodynamik

- ▶ Zeitkomponente folgt aus Bewegungsgleichung für $\vec{p}_{\text{mech}}$
- ▶ Vierergeschwindigkeit $(u^\mu) = p_{\text{mech}}^\mu / m = d_\tau x^\mu = \gamma d_t x^\mu$

$$d_\tau p_{\text{mech}} = q \begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{E} \\ u^0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \end{pmatrix} = q(F^\mu{}_\nu) u^\nu$$

- ▶ mit **Feldstärke- oder Faraday-Tensor**

$$(F^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = (F^\mu{}_\sigma \eta^{\sigma\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kovariante Elektrodynamik

- ▶ Beziehung zu **Potentialen**: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
- ▶ **Transformationsverhalten** unter Lorentz-Boosts

$$F'^{\mu\nu}(\underline{x}') = \Lambda_B^\mu{}_\rho(-\eta, \vec{n}) \Lambda_B^\nu{}_\sigma(-\eta, \vec{n}) F^{\rho\sigma}(\underline{x}), \quad \underline{x} = \hat{\Lambda}_B(+\eta, \vec{n})$$

- ▶ ergibt für Feldstärken im Dreierformalismus ($\vec{E}_\parallel = (\vec{v} \cdot \vec{E})\vec{v}/v^2$, $\vec{E}_\perp = \vec{E} - \vec{E}_\parallel$):

$$\vec{E}'(\underline{x}') = \vec{E}_\parallel(\underline{x}) + \gamma[\vec{E}_\perp(\underline{x}) + \vec{v} \times \vec{B}(\underline{x})] = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v}[\vec{v} \cdot \vec{E}(\underline{x})],$$

$$\vec{B}'(\underline{x}') = \vec{B}_\parallel(\underline{x}) + \gamma[\vec{B}_\perp(\underline{x}) - \vec{v} \times \vec{E}(\underline{x})] = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v}[\vec{v} \cdot \vec{B}(\underline{x})].$$

- ▶ **vierdimensionaler Levi-Civita-Tensor**: Komponenten $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ total antisymmetrisch unter Indexvertauschungen und

$$\epsilon^{0123} = +1$$

- ▶ **CAVEAT!** $\Rightarrow$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\mu'}\eta_{\nu\nu'}\eta_{\rho\rho'}\eta_{\sigma\sigma'}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

- ▶ invariante Tensorkomponenten unter **SO**(1,3)-Transformationen
- ▶ **CAVEAT!** in der Literatur nicht einheitlich (genau wie Wahl der Signatur der Minkowski-Pseudometrix (+ — —) (Westküstenkonvention) vs. (— + + +) (Ostküstenkonvention))

► Hodge-Dual

$${}^{\dagger}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) \hat{=} (\vec{E}, \vec{B}), \quad ({}^{\dagger}F^{\mu\nu}) \hat{=} (\vec{B}, -\vec{E})$$

► ${}^{\dagger\dagger}F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$

Kovariante Elektrodynamik

► Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (\text{homogene Maxwell-Gleichungen}),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \quad (\text{inhomogene Maxwell-Gleichungen}).$$

► kovariante Version

$$\partial_\mu {}^\dagger F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

► Viererstromdichte

$$\underline{j} = (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

► Ladungserhaltung (Kontinuitätsgleichung) notwendige Folgerung

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Kovariante Elektrodynamik

- **Bemerkung:** Kovarianz der partiellen Ableitung: Sei Φ Viererskalar $\Phi'(\underline{x}') = \Phi(\underline{x})$, $\underline{x}' = \hat{\Lambda} \underline{x}$

$$\partial'_\mu \Phi' = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \Phi = \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu \Phi$$

- Vierergradient $\partial_\mu \Phi$ transformiert sich wie **kovariante Vierervektorkomponenten** bzw. wie pseudo-kartesische Basisvektoren $\mathbf{e}_\nu$,

$$\mathbf{e}'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \mathbf{e}_\nu$$

- kontravariante Komponenten des **Vierergradienten**

$$\partial^\mu \Phi = \eta^{\mu\rho} \partial_\rho \Phi = \eta^{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Phi = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi$$

- **Caveat bei Indexstellung** von Ableitungen/Gradienten

- **Eichinvarianz:** mit χ beliebigem Skalarfeld:

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu} \chi, \quad \Phi' = \Phi + \partial_t \chi, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \chi$$

beschreibt dasselbe elektromagnetische Feld:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A'^{\nu} - \partial^{\nu} A'^{\mu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} - (\partial^{\mu} \partial^{\nu} - \partial^{\nu} \partial^{\mu}) \chi = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} = F^{\mu\nu}.$$

- **Bewegungsgleichung für Potentiale**

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \partial_{\mu} (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) = \square A^{\nu} - \partial_{\nu} \partial_{\mu} A^{\mu} = j^{\nu}$$

- **D'Alembert-Operator:** $\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \partial_t^2 - \Delta$ (Wellengleichung!)

Kovariante Elektrodynamik

- ▶ **Eichfreiheit** $\Rightarrow$ darf beliebige Nebenbedingung stellen („Wahl der Eichung“)
- ▶ besonders bequem, da kovariant: **Lorenz-Eichung**

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \square A^\nu = j^\nu$$

- ▶ **inhomogene Wellengleichung für A^ν** (separiert in vier Komponenten, Dank Lorenz-Eichung)
- ▶ NB: Lorenz (Ludvig Lorenz, dänischer Physiker), nicht Lorentz (Hendrik Antoon Lorentz, niederländischer Physiker) [J001]
- ▶ Lösung: **retardierte Potentiale**

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{j^\mu(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

- ▶ $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ (in natürlichen Einheiten $|\vec{x} - \vec{x}'|$):
Lichtlaufzeit von Quellpunkt $\vec{x}'$ zu Beobachtungspunkt $\vec{x}$

Wirkungsprinzip für Felder

Literatur: [\[Sop08\]](#)

Wirkungsprinzip für Felder

- ▶ irgendwelche Felder Φ_i
(i beliebiger Index; kann für Vektor- oder Tensorfelder auch ein oder mehrere Minkowski-Indizes sein)

- ▶ **Wirkungsfunktional**

$$S[\Phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

- ▶ Suche **stationären Punkt** unter Variationen $\delta\Phi_i$ (mit $\delta t = \delta \vec{x} = 0$ und $\delta\Phi_i(t_1, \vec{x}) = \delta\Phi_i(t_2, \vec{x}) = 0$)
- ▶ $\delta(\partial_\mu \Phi_i) = \partial_\mu \delta\Phi_i$

Wirkungsprinzip für Felder

- ▶ **Variation der Wirkung** ($V^{(4)} = (t_1, t_2) \times \mathbb{R}^3$)
- ▶ mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{V^{(4)}} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \partial_\mu \delta \Phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right] \\ &= \int_{V^{(4)}} d^4x \delta \Phi_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \right] \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

- ▶ muss für beliebige $\delta \Phi_i$ gelten $\Rightarrow$ „**Fundamentalsatz der Variationsrechnung**“
- ▶ eckige Klammer unter Integral muss verschwinden für alle $\underline{x}$
 $\Rightarrow$ **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \stackrel{!}{=} 0.$$

Wirkungsprinzip für Felder

- ▶ „rate relativistisch kovariante Gleichungen“: $\mathcal{L}$ Viererskalar
- ▶ Beispiel: ein reelles Skalarfeld Φ (kein Index A nötig)
- ▶ was kann man mit Φ und mit $\partial_\mu \Phi$ „basteln“?
- ▶ einfachste Idee

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{m^2}{2}\Phi^2$$

- ▶ Bewegungs-Gleichungen $\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen
- ▶ kanonischer Feldimpuls

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = \partial^\mu \Phi.$$

- ▶ Bewegungs-Gleichungen

$$\partial_\mu \Pi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = (\square + m^2)\Phi = 0$$

Wirkungsprinzip für Felder

- ▶ **Klein-Gordon-Gleichung**
- ▶ folgt mit Einstein-de-Broglie als (vermeintliche!) relativistische Gleichung für Spin 0
- ▶ $E = H \rightarrow i\partial_t, \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$
- ▶ relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freies Teilchen $\hat{=}$ **Dispersionsrelation** für Wellen

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \Rightarrow [(i\partial_t)^2 - (-i\vec{\nabla})^2]\Phi = -\square\Phi = m^2\Phi$$

- ▶ **Historie:** Schrödingers erster Ansatz für quantenmechanische Wellenfunktion
- ▶ Problem: **Energieeigenwertproblem für Wasserstoffatom** $\Rightarrow$ „falsche“ Feinstruktur des Spektrums
- ▶ Relativistik nicht richtig, aber nichtrelativistisch stimmt's

Wirkungsprinzip für Felder

- ▶ gleiches Argument für **nichtrelativistische Wellenfunktion**
- ▶ $E = \vec{p}^2/(2m)$

$$i\partial_t \psi = \frac{1}{2m}(-i\nabla)^2 \psi = -\frac{1}{2m} \Delta \psi$$

- ▶ Schrödinger-Gleichung für freies Teilchen

Wirkungsprinzip für Felder

- ▶ Felder: A^μ (hier $i = \mu$ als Feldindex, Lorentz-Index)
- ▶ $\mathcal{L}$ muss nicht nur Lorentz-Skalar sein, sondern auch **eichinvariant**
- ▶ eichinvarianter Ausdruck aus 1. Ableitungen: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
- ▶ muss auch noch irgendwie j^μ (vorgegebene Viererstromdichte unterbringen, die ohne Ableitungen in **Maxwell-Gleichungen** auftritt)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

- ▶ **Wechselwirkungsterm** eichinvariant? $\Rightarrow$ Übungen
- ▶ einfacher als Euler-Lagrange-Gleichungen: direkt Variationsprinzip

$$\begin{aligned}\delta S &= - \int_{V^{(4)}} d^4x \left[\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + j^\mu \delta A_\mu \right] = - \int_{V^{(4)}} d^4x \left[F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu + j^\nu \delta A_\nu \right] \\ &= - \int_{V^{(4)}} d^4x \delta A_\nu \left[-\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu \right] \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Wirkungsprinzip für Felder

- ▶ **Bewegungsgleichungen** $\Rightarrow$ inhomogene Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

- ▶ homogene Maxwell-Gleichungen durch Potentialansatz $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ erfüllt
- ▶ **Knobelaufgabe**: warum nicht auch prinzipiell Beitrag $\mathcal{L}' = {}^\dagger F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$?

Noether-Theorem

[Noe18, Hee24]

Noether-Theorem

- ▶ kontinuierliche Symmetrien: **Lie-Gruppen**
- ▶ in der Physik meist **Matrixgruppen**
- ▶ realisiert durch die Operation von Matrizen auf Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$
- ▶ Beispiel: Drehungen um Winkel φ in der Ebene $\mathbb{R}^2$

$$\hat{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

- ▶ bilden **Abelsche Gruppe** $SO(2)$
(spezielle orthogonale Gruppe in $\mathbb{R}^2$)

$$\hat{D}(\varphi_2)\hat{D}(\varphi_1) = \hat{D}(\varphi_1 + \varphi_2) = \hat{D}(\varphi_1)\hat{D}(\varphi_2)$$

- ▶ Neutrales Element: $\hat{D}(0) = \mathbb{1}_2$
- ▶ Inverses: $\hat{D}^{-1}(\varphi) = \hat{D}(-\varphi) \Rightarrow$ **Gruppe**
- ▶ Gruppenmultiplikation **kommutativ** $\Leftrightarrow$ **Abelsche Gruppe**
- ▶ $\hat{D}^{-1}(\varphi) = \hat{D}(-\varphi) = \hat{D}^T(\varphi), \det \hat{D}(\varphi) = 1$

Noether-Theorem

- ▶ **Matrix** differenzierbar nach Parameter φ

$$d_{\varphi} \hat{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

- ▶ „infinitesimale Drehung“

$$\hat{D}(\delta \varphi) = \hat{D}(0) + \delta \varphi d_{\varphi} \hat{D}(0) = \hat{D}(0) + \delta \varphi \hat{t}, \quad \hat{t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -(\epsilon_{ab})$$

- ▶ $\hat{t}$: **infinitesimale Erzeugende**

$$\hat{D}(\varphi + \delta \varphi) = \hat{D}(\delta \varphi) \hat{D}(\varphi) = (\mathbb{1} + \delta \varphi \hat{t}) \hat{D}(\varphi) \Rightarrow d_{\varphi} \hat{D}(\varphi) = \hat{t} \hat{D}(\varphi)$$

- ▶ Lösung: **Matrix-Exponentialfunktion**

$$\hat{D}(\varphi) = \exp(\varphi \hat{t})$$

Noether-Theorem

- ▶ **Matrix-Exponentialfunktion** definiert über Potenzreihe

$$\exp(\varphi \hat{t}) = \mathbb{1} + \varphi \hat{t} + \frac{1}{2!} \varphi^2 \hat{t}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\varphi \hat{t})^k.$$

- ▶ berechne $\hat{t}^n$

$$\hat{t}^2 = -\mathbb{1}, \quad \hat{t}^3 = -\hat{t}, \quad \dots, \quad \hat{t}^{2j} = (-1)^j \mathbb{1}, \quad \hat{t}^{2j+1} = (-1)^j \hat{t}$$

- ▶ Exponentialreihe

$$\exp(\varphi \hat{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \varphi^{2j} \mathbb{1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \varphi^{2j+1} \hat{t} = \cos \varphi \mathbb{1} + \sin \varphi \hat{t} = \hat{D}(\varphi)$$

Noether-Theorem

- ▶ Äquivalente Lagrange-Funktionen

$$A_k[\Phi_i] = \int_{V^{(4)}} d^4x \mathcal{L}_k(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, \underline{x}), \quad k \in \{1, 2\}$$

- ▶ $\mathcal{L}_1$ heißt äquivalent zu $\mathcal{L}_1$ falls

$$\frac{\delta}{\delta \Phi_i}(A_1 - A_2) = 0$$

- ▶ dann gleiche Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen)
- ▶ Lösung: $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ äquivalent $\Leftrightarrow \exists \Omega^\mu(\Phi_i, \underline{x})$ mit

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \partial_\mu \Omega^\mu = \mathcal{L}_1 + \partial_\mu \Phi_i \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_i} + \partial_\mu^{(\text{expl})} \Omega^\mu$$

Noether-Theorem

► Beweis

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} &= \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} + \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_i} \Rightarrow \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} + \partial_\mu \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_i}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \Phi_i} &= \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \Phi_i} + \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \partial_\mu \Omega^\mu = \partial_\mu \frac{\partial \Omega^\mu}{\partial \Phi_i} \\ \Rightarrow \frac{\delta}{\delta \Phi_j} (A_2 - A_1) &= 0\end{aligned}$$

Noether-Theorem

- ▶ **Noether-Symmetrie:** Feldtheorie mit $\mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i, \underline{x})$
- ▶ **infinitesimale Transformation** von Feldern und $\underline{x}$

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \delta \alpha^k \xi_k^\mu(x), \quad \Phi_i \rightarrow \Phi'_i(x') = \Phi_i(x) + \delta \alpha^k \Xi_{ik}(\Phi_i, x)$$

- ▶ **Variation der Wirkung**

$$\delta S = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x' \mathcal{L}(\Phi'_i, \partial'_\mu \Phi'_i, x') - \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i, x)$$

- ▶ benötige

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu \Phi_i) &= \partial'_\mu \Phi'_i - \partial_\mu \Phi_i = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu [\Phi_i + \delta \alpha^k \Xi_{ik}] - \partial_\mu \Phi_i \\ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= \delta^\mu_\nu - \delta \alpha^k \partial_\nu \xi_k^\mu \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu + \delta \alpha^k \partial_\mu \xi_k^\nu + \mathcal{O}(\delta \alpha^2) \\ \Rightarrow \delta(\partial_\mu \Phi_i) &= \delta \alpha^k [\partial_\mu \Xi_{ik} + \partial_\mu \xi_k^\nu \partial_\nu \Phi_i] \\ d^4 x' &= d^4 x \det \left(\frac{\partial x'}{\partial \underline{x}} \right) = d^4 x [1 - \delta \alpha^k \partial_\mu \xi_k^\mu + \mathcal{O}(\delta \alpha^2)] \end{aligned}$$

Noether-Theorem

► Einsetzen in Variation der Wirkung

$$\delta S = \delta \alpha^k \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \Xi_{ik} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} [\partial_\mu \Xi_{ik} + \partial_\mu \xi_k^\nu \partial_\nu \Phi_i] - \xi_k^\mu (\partial_\mu \mathcal{L})_{\text{expl}} - \mathcal{L} \partial_\mu \xi_k^\mu \right]$$

► Symmetrie $\Leftrightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \exists \Omega_k^\mu(\Phi_j, \underline{x})$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} [\partial_\mu \Xi_{jk} + \partial_\mu \xi_k^\nu \partial_\nu \Phi_j] - \xi_k^\mu \left(\partial_\mu^{(\text{expl})} \mathcal{L} \right) - \mathcal{L} \partial_\mu \xi_k^\mu + \partial_\mu \Omega_k^\mu(\Phi_j, \underline{x}) = 0$$

Noether-Theorem

- kanonischer Energie-Impuls-Tensor

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\nu \Phi_j - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu$$

- Symmetriebedingung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \Xi_{jk} + \partial_\mu \xi_k^\nu \Theta^\mu{}_\nu - \xi_k^\nu (\partial_\nu^{\text{(expl)}} \mathcal{L}) + \partial_\mu \Omega_k^\mu(\Phi_j, x) = 0 \quad (\text{SB})$$

- muss für beliebige Felder Φ_j gelten

Noether-Theorem

- Folgerungen für Lösungen der Feldgleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j}$$

- Viererdivergenz des Energie-Impulstensors

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Theta^\mu{}_\nu &= \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) \partial_\nu \Phi_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \partial_\nu \Phi_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \partial_\nu \Phi_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \partial_\nu \Phi_j - \partial_\nu^{(\text{expl})} \mathcal{L} \\ &= -\partial_\nu^{(\text{expl})} \mathcal{L}.\end{aligned}$$

- „blauer Term“

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \Xi_{jk} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \Xi_{jk} \right)$$

Noether-Theorem

- Schlussfolgerung: **Noether-Ströme**

$$j_k^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} \Xi_{jk} + \Theta^\mu{}_\nu \xi_k^\nu + \Omega_k^\mu$$

erfüllen **Kontinuitätsgleichung**

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0$$

- jede unabhängige Lie-Symmetrie $\Rightarrow$ erhaltene Noether-Ladung

$$Q_k = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} j_k^0(x) \Rightarrow \dot{Q}_k = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \partial_t j_k^0 = - \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_k = 0$$

- NB: Q_k ist **Lorentzinvariante** $\Leftrightarrow$ **Kontinuitätsgleichung für j_k^μ** gilt
(Beweis mit 4D Gaußschem Integralsatz [Hee24])

Noether-Theorem

- ▶ Poincaré-Symmetrie
- ▶ Minkowski-Raumzeit: symmetrisch unter Raum-Zeit-Translationen und eigentlich orthochronen Lorentz-Transformationen
- ▶ Noether-Analysis: brauche infinitesimale Transformationen
- ▶ Raum-Zeit-Translationen
 - ▶ $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \Rightarrow$ infinitesimale Transformation

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta a^{\mu} = x^{\mu} - \delta a^{\kappa} \xi_{\kappa}^{\mu}(\underline{x}) \Rightarrow \xi_{\kappa}^{\mu} = -\delta_{\kappa}^{\mu}.$$

Noether-Theorem

- ▶ **spezielle orthochrone Lorentz-Transformationen**

- ▶ $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ mit $\hat{\Lambda} \in \text{SO}(1, 3)^{\uparrow}$

- ▶ **infinitesimal** $\delta \underline{x} = \delta \hat{\omega} \underline{x}$

$$(\mathbb{1} + \delta \hat{\omega})^T \hat{\eta} (\mathbb{1} + \delta \hat{\omega}) = \hat{\eta} + \delta \hat{\omega}^T \eta + \hat{\eta} \delta \hat{\omega} = \hat{\eta}$$

$$\Rightarrow \delta \hat{\omega}^T \eta + \hat{\eta} \delta \hat{\omega} = (\eta \delta \hat{\omega})^T + \hat{\eta} \delta \hat{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \eta \delta \hat{\omega} = (\delta \omega_{\mu\nu}) = -(\delta \omega_{\nu\mu})$$

- ▶ **manifest kovariante Schreibweise**

$$\delta x^{\mu} = \delta \omega_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} x^{\beta} = \frac{1}{2} \delta \omega_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\alpha} x^{\beta} - \eta^{\mu\beta} x^{\alpha}) \Rightarrow \xi^{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (x^{\alpha} \eta^{\mu\beta} - x^{\beta} \eta^{\mu\alpha})$$

Noether-Theorem

► Boosts

$$\delta \hat{\omega}_B(\vec{n}) = \hat{\eta} \begin{pmatrix} 0 & \vec{n}^T \\ -\vec{n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{n}^T \\ \vec{n} & 0 \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot \hat{\vec{k}}, \quad \hat{k}_j = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_j^T \\ \vec{e}_j & 0 \end{pmatrix}$$

► Drehungen

$$\delta \hat{\omega}^\mu{}_\nu = \hat{\eta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{am n} n^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_{am n} n^a \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot \hat{\vec{j}}, \quad j_{kmn} = -\epsilon_{kmn}$$

► infinitesimale Drehung

$$\delta x^0 = 0, \quad \delta \vec{x} = -\delta \varphi \vec{e}_m n^k \epsilon_{kmn} x^n = \delta \varphi \vec{n} \times \vec{x}$$

- **Übung:** zeige, dass $\exp(\eta \hat{\vec{k}} \cdot \vec{n})$ **Boosts** mit Rapidität η in Richtung von $\vec{n}$ und $\exp(\varphi \hat{\vec{j}} \cdot \vec{n})$ **Drehungen** um den Winkel φ um die Drehachse $\vec{n}$ erzeugen!

Noether-Theorem

- ▶ übliches Transformationsverhalten der Felder

- ▶ Felder Skalare unter Translationen

$$\Phi'_i(x') = \Phi_i(x) = \Phi_i(x' - a) \Rightarrow \delta\Phi_i = \Phi'_i(x') - \Phi_i(x) = 0 \Rightarrow \Xi_{ik} = 0$$

- ▶ Falls $\mathcal{L}$ nicht explizit von $\underline{x}$ abhängt $\Rightarrow$ kann $\Omega^\mu = 0$ setzen
 - ▶ Noether-Ströme = kanonischer Energie-Impuls-Tensor
 - ▶ (lokale!) Energie-Impulserhaltung

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0.$$

- ▶ $(\Theta^{0\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \vec{g} \end{pmatrix}$
 - ▶ ε : Energiedichte
 - ▶ $\vec{g}$: Impulsdichte

Noether-Theorem

- ▶ eigentlich orthochrone Lorentz-Trafos: Felder transformieren unter irgendeiner (endlichdimensionalen) **linearen Darstellung der $SO(1,3)^\dagger$**

$$\Phi'_i(x') = M_{ij}(\Lambda)\Phi_j(x) = M_{ij}(\Lambda)\Phi_j(\hat{\Lambda}^{-1}x')$$

- ▶ **Darstellungseigenschaft**

$$\hat{M}(\hat{\Lambda}_1)\hat{M}(\hat{\Lambda}_2) = \hat{M}(\hat{\Lambda}_1\hat{\Lambda}_2)$$

- ▶ infinitesimal

$$\delta\phi_i = \frac{1}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}\phi_j \Rightarrow \Xi_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}\phi_j,$$

- ▶ NB: für Vektorfelder sind die $\hat{\Sigma}^{\alpha\beta}$ durch die $\hat{\vec{k}}$ und $\hat{\vec{j}}$ gegeben, denn

$$A'^\mu(\underline{x}') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\underline{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\hat{\Lambda}^{-1}\underline{x}')$$

- ▶ üblicherweise ist $\mathcal{L}$ **Skalar unter $SO(1,3)^\dagger$ -Transformationen** und nicht explizit $\underline{x}$ -abhängig $\Rightarrow$ kann $\Omega^\mu = 0$ wählen

Noether-Theorem

► Noether-Ströme kanonischer Vierer-Drehimpulstensor

$$J^{\mu\alpha\beta} = -J^{\mu\beta\alpha} = x^\alpha \Theta^{\mu\beta} - x^\beta \Theta^{\mu\alpha} + S^{\mu\alpha\beta} \quad \text{with} \quad S^{\mu\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \Sigma_{ij}^{\alpha\beta} \phi_j.$$

- für Skalarfeld $\Xi_{ij}^{\mu\nu} = 0$
- dann für reine Boosts ($\delta \omega_{ab} = 0$)

$$J^{\mu 0 \beta} = x^0 \Theta^{\mu \beta} - x^\beta \Theta^{\mu 0}$$

- drei Erhaltungsgrößen ($\beta \in \{1, 2, 3\}$) ($\beta = 0$ liefert einfach 0); mit E Gesamtenergie und $\vec{P}$ Gesamtimpuls

$$\begin{aligned} K^\beta &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (x^0 \Theta^{0\beta} - x^\beta \Theta^{00}) = \text{const} \\ \Rightarrow \vec{K} &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} (t \vec{g} - \vec{x} \epsilon) = \vec{P} t - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \vec{x} \epsilon = -\vec{R}_0 = \text{const} \end{aligned}$$

Noether-Theorem

- Energie-Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig

$$\vec{R} := \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \vec{x} \varepsilon \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{E} t$$

- NB: gleiche Analyse in Newtonscher (Kontinuums-)Mechanik: **massengewichteter** Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig
- in Relativitätstheorie ist die **Gesamtenergie** Maß für **Trägheit**!

Noether-Theorem

► Pseudoeichtransformationen

- Stromdichten erhaltener Ladungen nicht eindeutig bestimmt: Sei $\Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\nu\mu}$ eine beliebige Funktion der Felder und $\underline{x} \Rightarrow$

$$j'^{\mu} = j^{\mu} + \partial_{\nu} \Omega^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_{\mu} j'^{\mu} = \partial_{\mu} j^{\mu}$$

- Erhaltung gilt dann auch für neue Stromdichte, wenn $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$
- **Noether-Stromdichten** nicht eindeutig durch Symmetrien bestimmt
- aber **Gesamtladung**: mit Gaußschem Integralsatz und Verschwinden der Ladungsdichte im räumlich Unendlichen

$$Q' = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} j'^0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} [j^0 + \partial_n \Omega^{0n}] = 0$$

► Belinfante-Rosenfeld-Tensor

- Uneindeutigkeit des Energie-Impuls- und Viererdrehimpulstensors

Noether-Theorem

- ▶ Pseudo-Eichtransformationen: **kann Energie-Impulstensor immer symmetrisch wählen**
hat manchmal Vorteile: z.B. eichinvarianter Energie-Impulstensor in Elektrodynamik (s. Übungen)
- ▶ **Lorentzinvarianz** $\Rightarrow$ Viererdrehimpulstensor

$$J^{\mu\alpha\beta} = -J^{\mu\beta\alpha} = x^\alpha \Theta^{\mu\beta} - x^\beta \Theta^{\mu\alpha} + S^{\mu\alpha\beta},$$
$$\partial_\mu J^{\mu\rho\nu} = \Theta^{\rho\nu} - \Theta^{\nu\rho} + \partial_\mu S^{\mu\rho\nu} = 0.$$

- ▶ Pseudoeichtransformation

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho \Omega^{\mu\rho\nu}, \quad \Omega^{\mu\rho\nu} = -\Omega^{\rho\mu\nu}$$

- ▶ suche $\Omega^{\mu\rho\nu}$ so, dass $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ [Bel40, Ros40]

$$\Omega^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}(S^{\mu\nu\rho} - S^{\rho\nu\mu} + S^{\nu\mu\rho}),$$

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho(S^{\mu\nu\rho} + S^{\nu\mu\rho}) - \frac{1}{2}(\Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu}) = \frac{1}{2}(\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}\partial_\rho(S^{\mu\nu\rho} + S^{\nu\mu\rho})$$

Noether-Theorem

- ▶ neuer Viererdrehimpulstensor

$$\tilde{J}^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} \Rightarrow \partial_\mu \tilde{J}^{\mu\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + x^\alpha \partial_\mu T^{\mu\beta} - T^{\beta\alpha} - x^\beta \partial_\mu T^{\mu\alpha} = 0$$

- ▶ $\Rightarrow$ Pseudoeichtransformation des kanonischen Viererdrehimpulstensors:

$$\begin{aligned}\tilde{J}^{\mu\alpha\beta} &= x^\alpha \Theta^{\mu\beta} - x^\beta \Theta^{\mu\alpha} + x^\alpha \partial_\rho \Omega^{\mu\rho\beta} - x^\beta \partial_\rho \Omega^{\mu\rho\alpha} \\ &= J^{\mu\alpha\beta} - S^{\mu\alpha\beta} + \partial_\rho (x^\alpha \Omega^{\mu\rho\beta} - x^\beta \Omega^{\mu\rho\alpha}) - (\Omega^{\mu\alpha\beta} - \Omega^{\mu\beta\alpha}) \\ &= J^{\mu\alpha\beta} + \partial_\rho \Omega^{\mu\rho\alpha\beta}, \quad \Omega^{\mu\rho\alpha\beta} = x^\alpha \Omega^{\mu\rho\beta} - x^\beta \Omega^{\mu\rho\alpha}\end{aligned}$$

Bibliography

- [Bel40] E. J. Belinfante, On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields, *Physica* **7**, 449 (1940),
[https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(40\)90091-X](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(40)90091-X).
- [Ein05] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Ann. d. Phys.* **322**, 891 (1905), <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
- [Ein09] A. Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 24 edn. (2009),
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-87777-6>.
- [Hee18] H. van Hees, *Theoretische Physik 1 für das Lehramt L3*, Goethe-Universität Frankfurt (2018),
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/theo1-l3.pdf>.

Bibliography

- [Hee24] H. v. Hees, Special Relativity (2024),
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/pf-faq/srt.pdf>.
- [Hee25] H. van Hees, *Mechanik für das gymnasiale Lehramt*, Springer Spektrum, Berlin (2025), <https://doi.org/10.1007/978-3-662-69047-5>.
- [Jac14] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, Walter de Gruyter, Berlin, Boston, 4 edn. (2014).
- [JO01] J. D. Jackson and L. B. Okun, Historical roots of gauge invariance, Rev. Mod. Phys. **73**, 663 (2001),
<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.663>.
- [LL92] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, vol. 2 of *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin (1992).

Bibliography

- [Noe18] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 235 (1918),
<https://doi.org/10.1080/00411457108231446>.
- [Oku89] L. B. Okun, The concept of mass, Physics Today **42**, 31 (Juni 1989),
<https://doi.org/10.1063/1.881171>.
- [Pla06] M. Planck, Das Relativitätsprinzip und die Grundgleichungen der Mechanik, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **8**, 136 (1906),
[https://de.wikisource.org/wiki/Das_Prinzip_der_RelativitÃt_und_die_Grundgleichungen_der_Mechanik](https://de.wikisource.org/wiki/Das_Prinzip_der_Relativit%C3%A4t_und_die_Grundgleichungen_der_Mechanik).
- [Ros40] L. J. H. C. Rosenfeld, Sur le tenseur d'impulsion-énergie, Roy. Belg. Memoirs de Classes de Science **18**, 063504 (1940).
- [Sch87] U. E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 2 edn. (1987).

Bibliography

- [Sop08] D. E. Soper, *Classical field theory*, Dover Publications, Minneola, New York (2008).
- [SU01] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, *Relativity, Groups, Particles*, Springer, Wien (2001).