Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik
Vorlesung 5: Spezielle Relativitätstheorie und klassische Felder

Hendrik van Hees

Inhaltsverzeichnis

1 Spezielle Relativitätstheorie

Spezielle Relativitätstheorie

Literatur: [Sch87, SU01, LL92, Hee24, Ein09, Ein05]

Spezielle Relativitätstheorie

- Historie: Maxwell-Elektrodynamik nicht kovariant unter „Galilei-Boosts“
- Lösung: Poincaré, Lorentz, Einstein: spezielle Relativitätstheorie
  - spezielles Relativitätsprinzip (Newton I) gültig
  - Lichtgeschwindigkeit unabhängig von Relativbewegung zwischen Quelle und Empfänger
  - Physikalische Gesetze (einschließlich Elektrodynamik!) gleich in allen Inertialsystemen
  - Minkowski-Raum-Zeit: neues Raum-Zeit-Modell
- klassische relativistische Physik
  - klassische Punktteilchenmechanik: (problematisch wegen Strahlungsrückwirkung)
  - klassische Elektrodynamik: paradigmatisches Beispiel für klassische relativistische Feldtheorie
  - klassische Kontinuumsmechanik: auch klassische Feldtheorie: keine Probleme mit Strahlungsrückwirkung!
  - Gravitation $\Rightarrow$ Allgemeine Relativitätstheorie
- natürliche Formulierung der klassischen relativistischen Physik: Feldtheorien (lokale Wechselwirkungen)

Spezielle Relativitätstheorie

- im Folgenden: natürliche Einheiten: $c = 1$ ($\hbar = k_{\mathrm{B}} = 1$)
- Minkowski-Raumzeit
  - Vierervektoren: $\boldsymbol{x} = x^{\mu} \boldsymbol{e}_{\mu}$

$$\underline{x} = (x^{\mu}) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \text{(kontravariante Komponenten)}, \quad x^0 = c\,t = t\,.$$

  - Minkowski-Produkt: Einstein-Summenkonvention (summiere über doppelt auftretende **gegenständige** Indizes)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \underline{x} \cdot \underline{y} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} = \underline{x}^{\mathrm{T}} \hat{\eta} \underline{y}, \quad \hat{\eta} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

- kovariante Vektorkomponenten

$$(x_\mu) = \hat{\eta}\underline{x} = (\eta_{\mu\nu} x^\nu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \quad (\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \hat{\eta}$$

- Lorentz-Transformationen
  - „pseudo-kartesische Basis“: $\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$
  - Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen

$$\boldsymbol{e}'_\mu = \boldsymbol{e}_\rho \Lambda^\rho{}_\mu$$

    pseudo-kartesisch
  - Bedingung

$$\eta_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu = \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\sigma \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \Leftrightarrow \hat{\Lambda}^{\mathrm{T}} \hat{\eta} \hat{\Lambda} = \hat{\eta}$$

  - wegen $\hat{\eta}^2 = \mathbb{1}$:

$$\left(\hat{\eta} \hat{\Lambda}^{\mathrm{T}} \hat{\eta}\right) \hat{\Lambda} = \mathbb{1} \Rightarrow \hat{\eta} \hat{\Lambda}^{\mathrm{T}} \hat{\eta} = \hat{\Lambda}^{-1}$$

  - $\hat{\Lambda}$ „pseudo-orthogonale Matrix“

- Drehungsfreier Lorentz-Boost in 1-Richtung
  - $\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3$:

$$\hat{\Lambda}_{\mathrm{B}}(\eta, \vec{e}_1) = (\underline{e}'_0, \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3) = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - $\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu = \eta_{\mu\nu}$:

$$A^2 - C^2 = 1, \quad B^2 - D^2 = -1, \quad AB - CD = 0.$$

  - $\boldsymbol{e}'_0$ soll in „Vorwärtszeitrichtung“ zeigen: $A > 0$

$$A = \cosh\eta, \quad B = \sinh\eta, \quad C = \sinh\eta, \quad D = \cosh\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} = x'^\mu \boldsymbol{e}'_\mu = x'^\mu \Lambda^\rho{}_\mu \boldsymbol{e}_\rho \Rightarrow \underline{x} = \hat{\Lambda}\underline{x}' \Rightarrow \underline{x}' = \hat{\Lambda}^{-1}\underline{x}$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \cosh\eta - x^1 \sinh\eta \\ -x^0 \sinh\eta + x^1 \cosh\eta \end{pmatrix}.$$

- Bewegung des Ursprungs von Σ' bzgl. Σ

$$x'^1 = 0 \;\Rightarrow\; x^1 = \tanh\eta\, x^0 = \tanh\eta\, t \;\Rightarrow\; v = \tanh\eta = \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta}.$$

- $1 - v^2 = 1 - \tanh^2\eta = (\cosh^2\eta - \sinh^2\eta)/\cosh^2\eta = 1/\cosh^2\eta$

$$\cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma, \quad \sinh\eta = \tanh\eta\cosh\eta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

- Lorentz-Boost in x^1-Richtung

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x^0 - v\,x^1 \\ x^1 - v\,x^0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} t - v\,x^1 \\ x^1 - v\,t \end{pmatrix}$$

- in SI-Einheiten:

$$\begin{pmatrix} c\,t' \\ x'^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} c\,t - v/c\,x^1 \\ x^1 - v\,t \end{pmatrix} \underset{|v/c|\ll 1}{\cong} \begin{pmatrix} c\,t \\ x^1 - v\,t \end{pmatrix}$$

- für $|v/c| \ll 1 \Rightarrow$ Galilei-Boost

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}\,t$$

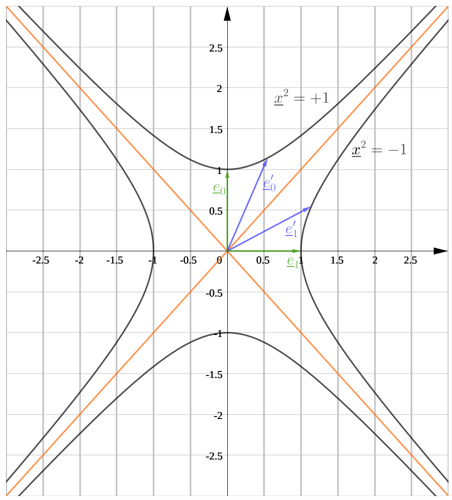
- Drehungsfreier Lorentz-Boost in beliebiger Richtung $\vec{n}$:

$$\hat{\Lambda}_{\mathrm{B}}(\eta, \vec{n}) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta\,\vec{n}^{\mathrm{T}} \\ \sinh\eta\,\vec{n} & (\cosh\eta - 1)\vec{n}\,\vec{n}^{\mathrm{T}} + \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}$$

  - $\Lambda_{\mathrm{B}}^{-1}(\eta, \vec{n}) = \Lambda_{\mathrm{B}}(-\eta, \vec{n})$

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} x'^0 \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \hat{\Lambda}_{\mathrm{B}}^{-1}(\eta, \vec{n}) \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0\cosh\eta - \vec{n}\cdot\vec{x}\sinh\eta \\ -x^0\sinh\eta\,\vec{n} + \vec{x} + (\cosh\eta - 1)(\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(t - \vec{v}\cdot\vec{x}) \\ \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}\,t) + \vec{x}_{\perp} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{x}_{\parallel} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{x}), \quad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}.$$



- Minkowski-Geometrie
  - $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > 0$: zeitartig
  - $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$: lichtartig
  - $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} < 0$: raumartig
- Lorentz-Gruppe
  - Lorentz-Gruppe O(1,3): $\hat{\Lambda} \in \mathrm{O}(1,3) \Leftrightarrow \hat{\Lambda}^{-1} = \hat{\eta}\hat{\Lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\eta}$

    $$\hat{\Lambda}_1,\, \hat{\Lambda}_2 \in \mathrm{O}(1,3) \Rightarrow (\hat{\Lambda}_1\hat{\Lambda}_2)^{-1} = \hat{\Lambda}_2^{-1}\hat{\Lambda}_1^{-1} = (\hat{\eta}\hat{\Lambda}_2^{\mathrm{T}}\hat{\eta})(\hat{\eta}\hat{\Lambda}_1^{\mathrm{T}}\hat{\eta}) = \hat{\eta}(\hat{\Lambda}_2^{\mathrm{T}}\hat{\Lambda}_1^{\mathrm{T}})\hat{\eta} = \hat{\eta}(\hat{\Lambda}_1\hat{\Lambda}_2)^{\mathrm{T}}\eta$$
    $$\Rightarrow \hat{\Lambda}_1\hat{\Lambda}_2 \in \mathrm{O}(1,3)$$

  - $\det\hat{\Lambda}^{-1} = 1/\det\hat{\Lambda} = (\det\hat{\eta})^2 \det\hat{\Lambda}^{\mathrm{T}} = \det\hat{\Lambda} \Rightarrow (\det\hat{\Lambda})^2 = 1 \Rightarrow \det\hat{\Lambda} \in \{1,-1\}$
  - Spezielle Lorentz-Gruppe: $\hat{\Lambda} \in \mathrm{O}(1,3)$ und $\hat{\Lambda} = +1$: $\hat{\Lambda} \in \mathrm{SO}(1,3)$ (Untergruppe)
  - $({\Lambda^0}_0)^2 \geq 1 \Rightarrow {\Lambda^0}_0 \geq 1$ oder ${\Lambda^0}_0 \leq -1$
  - $\hat{\Lambda} \in \mathrm{O}(1,3)$ und ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ bilden Untergruppe $\mathrm{O}(1,3)^{\uparrow}$ (orthochrone Lorentz-Gruppe)
  - $\hat{\Lambda} \in \mathrm{O}(1,3)^{\uparrow}$: Zeitrichtung zeit- oder lichtartiger Vektoren ungeändert
  - $\Rightarrow$: kausal verknüpfte Ereignisse müssen zeit- oder lichtartig zueinander liegen

- $\hat{\Lambda} \in \mathrm{SO}(1,3)$ und ${\Lambda^0}_0 \geq 1$: Untergruppe $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ (eigentlich orthochrone Lorentz-Gruppe)
- $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$: hängt stetig mit $\mathbb{1}$ zusammen

- Relativistische Mechanik
  - freies Teilchen: Symmetrie unter Zeittranslationen, Raumtranslationen und Rotationen wie in Galilei-Newton-Mechanik
  - Noether-Symmetrie: Lagrange-Funktion [Hee18, Hee25]

$$L = L(\vec{v}^2)$$

  - Wirkung muss Lorentz-Invariante sein

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(\dot{\vec{x}}^2) = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, m\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2}$$

  - $\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{x}^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$: Lorentz-invariant
  - $\mathrm{d}\tau$: infinitesimales Zeitintervall gemessen im momentanem Ruhsystem des Teilchens: τ Eigenzeit
  - Euler-Lagrange-Gleichungen

$$L = -m\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2} \Rightarrow \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2}} = m\gamma\dot{\vec{x}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau},$$
$$\dot{\vec{p}} \overset{\mathrm{ELG}}{=} \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0.$$

  - $\partial_t L = 0 \Rightarrow H = E = \mathrm{const}$

$$E = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L = m\gamma\dot{\vec{x}}^2 + m/\gamma = \frac{m}{\gamma}(\gamma^2\dot{\vec{x}}^2+1) = \frac{m}{\gamma}\left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{1-\dot{\vec{x}}^2}+1\right) = m\gamma \Rightarrow \gamma = \mathrm{const}$$

  - $\vec{p} = m\gamma\dot{\vec{x}} = \mathrm{const} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \vec{v} = \mathrm{const}$
  - m: invariante Masse (Lorentz-Skalar)
  - $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} = \mathrm{d}t/\gamma$
  - Vierer-Geschwindigkeit (Vierervektor)

$$\underline{u} = \mathrm{d}_\tau \underline{x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\underline{\dot{x}} = \gamma\begin{pmatrix}1\\ \vec{v}\end{pmatrix}, \quad \underline{u}\cdot\underline{u} = \gamma^2(1^2 - v^2) = \gamma^2(1-v^2) = 1 = \mathrm{const}$$

- Vierer-Impulsvektor

$$\underline{p} = m\underline{u} = \begin{pmatrix} m\gamma \\ m v\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{p} \cdot \underline{p} = m^2 = E^2 - \vec{p}^2$$

- relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} = m\sqrt{1 + \vec{p}^2/m^2}$$

- Nichtrelativistischer Limes
  - $|\vec{p}| \ll mc$

$$E \simeq m\left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2}\right) = m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

  - nichtrelativistische Energie-Impulsbeziehung (modulo Ruheenergie $E_0 = mc^2$)
  - veraltet: „relativistische Masse“ $m_{\mathrm{rel}} = \gamma m$
  - Einstein 1948: „sollte nicht mehr verwendet werden!“ [Oku89]
  - Verwirrung stammt aus 1. Paper zur SRT von 1905
  - dort Punktmechanik noch nicht vollständig formuliert
  - Planck 1906 [Pla06]

2 Kovariante Elektrodynamik

Kovariante Elektrodynamik

Literatur: [LL92, Jac14]

Kovariante Elektrodynamik

- Punktladung im äußeren elektromagnetischen Feld
- Elektrodynamik mit Skalar- und Vektorpotentialen
- physikalische Felder (im üblichen 3er-Formalismus)

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\Phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

- Suche relativistisch invarianten Beitrag L_{int}
- fasse Potentiale zu Vierervektorfeld $(A^\mu) = (\Phi, \vec{A})^{\text{T}}$ zusammen
- Ladung q als Kopplungsstärke
- kovarianter Wechselwirkungsbeitrag zur Wirkung

$$\mathrm{d}S_{\text{int}} = -q\,\mathrm{d}x^\mu A_\mu$$

- Wirkung

$$S[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[-m\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2} - q\,\dot{x}^\mu A_\mu(\underline{x}) \right]$$

- NB: Lokalität der Wechselwirkung: in L geht das em. Feld entlang der Weltlinie $x^\mu(t)$ ein, also stets am momentanen Ort des Teilchens

$$L = -m\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2} - q[A_0(t,\vec{x}) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(t,\vec{x})]$$

- Kanonischer Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\gamma\dot{\vec{x}} + q\vec{A}(t,\vec{x})$$

- kanonischer Impuls nicht mechanischer Impuls $\vec{p}_{\text{mech}} = m\gamma\dot{\vec{x}}$!
- Bewegungsgleichungen (beachte: $A_0 = A^0 = \Phi$, $A^j = -A_j$, $B^j = \epsilon^{jkl}\partial_k A^l$)

$$\begin{aligned}
\dot{p}^j = \dot{p}^j_{\text{mech}} - q\partial_t A_j + \dot{x}_k \partial_k A_j = \frac{\partial L}{\partial x^j} &= -q\partial_j A_0 + q\dot{x}^k \partial_j A_k \\
\dot{p}^j_{\text{mech}} = q(-\partial_t A^j - \partial_j \Phi) + q\dot{x}^k(\partial_j A^k - \partial_k A^j) & \\
= qE^j + q\epsilon^{jkl}\dot{x}^k B^l = q[E^j + (\dot{\vec{x}} \times \vec{B})^j] &
\end{aligned}$$

- nicht manifest kovariant
- Vierdimensionale Ergänzung und Ableitung nach Eigenzeit mit $\mathrm{d}_\tau = \gamma \mathrm{d}_t$
- Viererimpuls

$$p^\mu_{\text{mech}} = m\mathrm{d}_\tau x^\mu = m\gamma \mathrm{d}_t x^\mu = \begin{pmatrix} m\gamma \\ \vec{p}_{\text{mech}} \end{pmatrix}$$

- allerdings nur 3 unabhängige Komponenten:

$$\underline{p}_{\text{mech}} \cdot \underline{p}_{\text{mech}} = m^2 \Rightarrow \underline{p}_{\text{mech}} \cdot \mathrm{d}_\tau \underline{p}_{\text{mech}} = 0 \Rightarrow p^0_{\text{mech}} \mathrm{d}_\tau p^0_{\text{mech}} = \vec{p}_{\text{mech}} \cdot \mathrm{d}_\tau \vec{p}_{\text{mech}}.$$

- Zeitkomponente folgt aus Bewegungsgleichung für $\vec{p}_{\text{mech}}$
- Vierergeschwindigkeit $(u^\mu) = p^\mu_{\text{mech}}/m = \mathrm{d}_\tau x^\mu = \gamma \mathrm{d}_t x^\mu$

$$\mathrm{d}_\tau \underline{p}_{\text{mech}} = q \begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{E} \\ u^0 \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \end{pmatrix} = q(F^\mu{}_\nu) u^\nu$$

- mit Feldstärke- oder Faraday-Tensor

$$(F^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = (F^\mu{}_\sigma \eta^{\sigma\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Beziehung zu Potentialen: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
- Transformationsverhalten unter Lorentz-Boosts

$$F'^{\mu\nu}(\underline{x}') = {\Lambda_{\text{B}}}^\mu{}_\rho(-\eta, \vec{n}) {\Lambda_{\text{B}}}^\nu{}_\sigma(-\eta, \vec{n}) F^{\rho\sigma}(\underline{x}), \quad \underline{x} = \hat{\Lambda}_{\text{B}}(+\eta, \vec{n})$$

- ergibt für Feldstärken im Dreierformalismus ($\vec{E}_\parallel = (\vec{v} \cdot \vec{E})\vec{v}/\vec{v}^2$, $\vec{E}_\perp = \vec{E} - \vec{E}_\parallel$:

$$\vec{E}'(\underline{x}') = \vec{E}_\parallel(\underline{x}) + \gamma[\vec{E}_\perp(\underline{x}) + \vec{v} \times \vec{B}(\underline{x})] = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v}[\vec{v} \cdot \vec{E}(\underline{x})],$$

$$\vec{B}'(\underline{x}') = \vec{B}_\parallel(\underline{x}) + \gamma[\vec{B}_\perp(\underline{x}) - \vec{v} \times \vec{E}(\underline{x})] = \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{v}[\vec{v} \cdot \vec{B}(\underline{x})].$$

- vierdimensionaler Levi-Civita-Tensor: Komponenten $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ total antisymmetrisch unter Indexvertauschungen und

$$\epsilon^{0123} = +1$$

- CAVEAT! $\Rightarrow$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\mu'}\eta_{\nu\nu'}\eta_{\rho\rho'}\eta_{\sigma\sigma'}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

- invariante Tensorkomponenten unter SO(1,3)-Transformationen
- CAVEAT! in der Literatur nicht einheitlich (genau wie Wahl der Signatur der Minkowski-Pseudometrix $(+---)$ (Westküstenkonvention) vs. $(-+++)$ (Ostküstenkonvention)
- Hodge-Dual

$$^\dagger F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) \widehat{=} (\vec{E}, \vec{B}), \quad (^\dagger F^{\mu\nu}) \widehat{=} (\vec{B}, -\vec{E})$$

- $^{\dagger\dagger}F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$
- Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \qquad \text{(homogene Maxwell-Gleichungen)},$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \partial_t\vec{E} = \vec{j} \qquad \text{(inhomogene Maxwell-Gleichungen)}.$$

- kovariante Version

$$\partial_\mu {}^\dagger F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

- Viererstromdichte

$$\underline{j} = (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

- Ladungserhaltung (Kontinuitätsgleichung) notwendige Folgerung

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

- Bemerkung: Kovarianz der partiellen Ableitung: Sei Φ Viererskalar $\Phi'(\underline{x}') = \Phi(\underline{x}), \quad \underline{x}' = \hat{\Lambda}\underline{x}$

$$\partial'_\mu\Phi' = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu\Phi = \Lambda^\nu{}_\mu\partial_\nu\Phi$$

- Vierergradient $\partial_\mu \Phi$ transformiert sich wie kovariante Vierervektorkomponenten bzw. wie pseudo-kartesische Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\nu$,

$$\boldsymbol{e}'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \boldsymbol{e}_\nu$$

- kontravariante Komponenten des Vierergradienten

$$\partial^\mu \Phi = \eta^{\mu\rho} \partial_\rho \Phi = \eta^{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Phi = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Phi$$

- Caveat bei Indexstellung von Ableitungen/Gradienten
- Eichinvarianz: mit χ beliebigem Skalarfeld:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi, \quad \Phi' = \Phi + \partial_t \chi, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \chi$$

  beschreibt dasselbe elektromagnetische Feld:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu)\chi = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}.$$

- Bewegungsgleichung für Potentiale

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial_\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

- D'Alembert-Operator: $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \Delta$ (Wellengleichung!)
- Eichfreiheit $\Rightarrow$ darf beliebige Nebenbedingung stellen („Wahl der Eichung“)
- besonders bequem, da kovariant: Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \Box A^\nu = j^\nu$$

- inhomogene Wellengleichung für A^ν (separiert in vier Komponenten, Dank Lorenz-Eichung)
- NB: Lorenz (Ludvig Lorenz, dänischer Physiker), nicht Lorentz (Hendrik Antoon Lorentz, niederlänischer Physiker) [JO01]
- Lösung: retardierte Potentiale

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x' \, \frac{j^\mu(t - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- $|\vec{x} - \vec{x}'|/c$ (in natürlichen Einheiten $|\vec{x} - \vec{x}'|$): Lichtlaufzeit von Quellpunkt $\vec{x}'$ zu Beobachtungspunkt $\vec{x}$

3 Wirkungsprinzip für Felder

Wirkungsprinzip für Felder

Literatur: [Sop08]

Wirkungsprinzip für Felder

- irgendwelche Felder Φ_i (i beliebiger Index; kann für Vektor- oder Tensorfelder auch ein oder mehrere Minkowski-Indizes sein)
- Wirkungsfunktional

$$S[\Phi] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \mathscr{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

- Suche stationären Punkt unter Variationen $\delta\Phi_i$ (mit $\delta t = \delta\vec{x} = 0$ und $\delta\Phi_i(t_1, \vec{x}) = \delta\Phi_i(t_2, \vec{x}) = 0$
- $\delta(\partial_\mu \Phi_i) = \partial_\mu \delta\Phi_i$
- Variation der Wirkung ($V^{(4)} = (t_1, t_2) \times \mathbb{R}^3$)
- mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_i} \delta\Phi_i + \partial_\mu \delta\Phi_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \right] \\ &= \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 x \, \delta\Phi_i \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \right] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

- muss für beliebige $\delta\Phi_i$ gelten $\Rightarrow$ „Fundamentalsatz der Variationsrechnung“
- eckige Klammer unter Integral muss verschwinden für alle $\underline{x}$ $\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi_i} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \stackrel{!}{=} 0.$$

- „rate relativistisch kovariante Gleichungen“: $\mathscr{L}$ Viererskalar
- Beispiel: ein reelles Skalarfeld Φ (kein Index A nötig)
- was kann man mit Φ und mit $\partial_\mu \Phi$ „basteln“?
- einfachste Idee

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{m^2}{2}\Phi^2$$

- Bewegungs-Gleichungen $\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen

- kanonischer Feldimpuls

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = \partial^\mu \Phi.$$

- Bewegungs-Gleichungen

$$\partial_\mu \Pi^\mu - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi} = (\Box + m^2)\Phi = 0$$

- Klein-Gordon-Gleichung
- folgt mit Einstein-de-Broglie als (vermeintliche!) relativistische Gleichung für Spin 0
- $E = H \to \mathrm{i}\partial_t$, $\vec{p} \to -\mathrm{i}\vec{\nabla}$
- relativistische Energie-Impuls-Beziehung für freies Teilchen $\hat{=}$ Dispersionsrelation für Wellen

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \;\Rightarrow\; [(\mathrm{i}\partial_t)^2 - (-\mathrm{i}\vec{\nabla})^2]\Phi = -\Box\Phi = m^2\Phi$$

- Historie: Schrödingers erster Ansatz für quantenmechanische Wellenfunktion
- Problem: Energieeigenwertproblem für Wasserstoffatom ⇒ „falsche“ Feinstruktur des Spektrums
- Relativistik nicht richtig, aber nichtrelativistisch stimmt's
- gleiches Argument für nichtrelativistische Wellenfunktion
- $E = \vec{p}^2/(2m)$

$$\mathrm{i}\partial_t \psi = \frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\nabla)^2\psi = -\frac{1}{2m}\Delta\psi$$

- Schrödinger-Gleichung für freies Teilchen
- Felder: A^μ (hier $i = \mu$ als Feldindex, Lorentz-Index)
- $\mathscr{L}$ muss nicht nur Lorentz-Skalar sein, sondern auch eichinvariant
- eichinvarianter Ausdruch aus 1. Ableitungen: $F_{\mu n u} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

- muss auch noch irgendwie j^μ (vorgegebene Viererstromdichte unterbringen, die ohne Ableitungen in Maxwell-Gleichungen auftritt)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

- Wechselwirkungsterm eichinvariant? ⇒ Übungen
- einfacher als Euler-Lagrangelgeichungen: direkt Variationsprinzip

$$\begin{aligned}\delta S &= -\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + j^\mu \delta A_\mu\right] = -\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4x \left[F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu + j^\nu \delta A_\nu\right] \\ &= -\int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4x\, \delta A_\nu \left[-\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu\right] \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

- Bewegungsgleichungen ⇒ inhomogene Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

- homogene Maxwell-Gleichungen durch Potentialansatz $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ erfüllt
- Knobelaufgabe: warum nicht auch prinzipiell Beitrag $\mathscr{L}' = {}^\dagger F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}$?

4 Noether-Theorem

Noether-Theorem

[Noe18, Hee24]

Noether-Theorem

- kontinuierliche Symmetrien: Lie-Gruppen
- in der Physik meist Matrixgruppen
- realisiert durch die Operation von Matrizen auf Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$
- Beispiel: Drehungen um Winkel φ in der Ebene $\mathbb{R}^2$

$$\hat{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

- bilden Abelsche Gruppe SO(2) (spezielle orthogonale Gruppe in $\mathbb{R}^2$)

$$\hat{D}(\varphi_2)\hat{D}(\varphi_1) = \hat{D}(\varphi_1 + \varphi_2) = \hat{D}(\varphi_1)\hat{D}(\varphi_2)$$

- Neutrales Element: $\hat{D}(0) = \mathbb{1}_2$
- Inverses: $\hat{D}^{-1}(\varphi) = \hat{D}(-\varphi) \Rightarrow$ Gruppe
- Gruppenmultiplikation kommutativ $\Leftrightarrow$ Abelsche Gruppe
- $\hat{D}^{-1}(\varphi) = \hat{D}(-\varphi) = \hat{D}^{\mathrm{T}}(\varphi)$, $\det \hat{D}(\varphi) = 1$
- Matrix differenzierbar nach Parameter φ

$$\mathrm{d}_\varphi \hat{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

- „infinitesimale Drehung“

$$\hat{D}(\delta\varphi) = \hat{D}(0) + \delta\varphi\, \mathrm{d}_\varphi \hat{D}(0) = \hat{D}(0) + \delta\varphi\, \hat{t}, \quad \hat{t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -(\epsilon_{ab})$$

- $\hat{t}$: infinitesimale Erzeugende

$$\hat{D}(\varphi + \delta\varphi) = \hat{D}(\delta\varphi)\hat{D}(\varphi) = (\mathbb{1} + \delta\varphi\, \hat{t})D(\varphi) \Rightarrow \mathrm{d}_\varphi \hat{D}(\varphi) = \hat{t}\hat{D}(\varphi)$$

- Lösung: Matrix-Exponentialfunktion

$$\hat{D}(\varphi) = \exp(\varphi\, \hat{t})$$

- Matrix-Exponentialfunktion definiert über Potenzreihe

$$\exp(\varphi\,\hat{t}) = \mathbb{1} + \varphi\,\hat{t} + \frac{1}{2!}\varphi^2\,\hat{t}^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\varphi\,\hat{t})^2.$$

- berechne $\hat{t}^n$

$$\hat{t}^2 = -\mathbb{1}, \quad \hat{t}^3 = -\hat{t}, \quad \ldots, \quad \hat{t}^{2j} = (-1)^j\,\mathbb{1}, \quad \hat{t}^{2j+1} = (-1)^j\,\hat{t}$$

- Exponentialreihe

$$\exp(\varphi\,\hat{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\varphi^{2j}\,\mathbb{1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\varphi^{2j+1}\,\hat{t} = \cos\varphi\,\mathbb{1} + \sin\varphi\,\hat{t} = \hat{D}(\varphi)$$

- Äquivalente Lagrange-Funktionen

$$A_k[\Phi_i] = \int_{V^{(4)}} \mathrm{d}^4 x\, \mathscr{L}_k(\phi_i, \partial_\mu\phi_i, \underline{x}), \quad k \in \{1,2\}$$

- $\mathscr{L}_1$ heißt äquivalent zu $\mathscr{L}_1$ falls

$$\frac{\delta}{\delta\Phi_i}(A_1 - A_2) = 0$$

- dann gleiche Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen)
- Lösung: $\mathscr{L}_1$ und $\mathscr{L}_2$ äquivalent $\Leftrightarrow \exists\Omega^\mu(\Phi_i, \underline{x})$ mit

$$\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1 + \partial_\mu\Omega^\mu = \mathscr{L}_1 + \partial_\mu\Phi_i\frac{\partial\Omega^\mu}{\partial\Phi_i} + \partial_\mu^{(\mathrm{expl})}\Omega^\mu$$

- Beweis

$$\frac{\partial\mathscr{L}_2}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} = \frac{\partial\mathscr{L}_1}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} + \frac{\partial\Omega^\mu}{\partial\Phi_i} \Rightarrow \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}_2}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} = \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}_1}{\partial(\partial_\mu\Phi_i)} + \partial_\mu\frac{\partial\Omega^\mu}{\partial\Phi_i},$$
$$\frac{\partial\mathscr{L}_2}{\partial\Phi_i} = \frac{\partial\mathscr{L}_1}{+}\frac{\partial}{\partial\Phi_i}\partial_\mu\Omega^\mu = \partial_\mu\frac{\partial\Omega^\mu}{\partial\Phi_i}$$
$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta\Phi_j}(A_2 - A_1) = 0$$

- Noether-Symmetrie: Feldtheorie mit $\mathscr{L}(\Phi_i, \partial_\mu\Phi_i, \underline{x})$

- infinitesimale Transformation von Feldern und $\underline{x}$

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \delta\alpha^k \xi^\mu_k(x), \quad \Phi_i \to \Phi'_i(x') = \Phi_i(x) + \delta\alpha^k \Xi_{ik}(\Phi_i, x)$$

- Variation der Wirkung

$$\delta S = \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x' \mathscr{L}(\Phi'_i, \partial'_\mu \Phi'_i, x') - \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i, x)$$

- benötige

$$\begin{aligned}
&\delta(\partial_\mu \Phi_i) = \partial'_\mu \Phi'_i - \partial_\mu \Phi_i = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \left[\Phi_i + \delta\alpha^k \Xi_{ik}\right] - \partial_\mu \Phi_i \\
&\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu - \delta\alpha^k \partial_\nu \xi^\mu_k \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu + \delta\alpha^k \partial_\mu \xi^\nu_k + \mathscr{O}(\delta\alpha^2) \\
&\Rightarrow \delta(\partial_\mu \Phi_i) = \delta\alpha^k \left[\partial_\mu \Xi_{ik} + \partial_\mu \xi^\nu_k \partial_\nu \Phi_i\right] \\
&\mathrm{d}^4 x' = \mathrm{d}^4 x \det\left(\frac{\partial \underline{x}'}{\partial \underline{x}}\right) = \mathrm{d}^4 x [1 - \delta\alpha^k \partial_\mu \xi^\mu_k + \mathscr{O}(\delta\alpha^2)]
\end{aligned}$$

- Einsetzen in Variation der Wirkung

$$\delta S = \delta\alpha^k \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_i} \Xi_{ik} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} [\partial_\mu \Xi_{ik} + \partial_\mu \xi^\gamma_k \partial_\nu \Phi_i] - \xi^\mu_k (\partial_\mu \mathscr{L})_{\text{expl}} - \mathscr{L} \partial_\mu \xi^\mu_k\right]$$

- Symmetrie $\Leftrightarrow$ $\delta S = 0$ $\Rightarrow \exists \Omega^\mu_k(\Phi_j, \underline{x})$:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} [\partial_\mu \Xi_{jk} + \partial_\mu \xi^\nu_k \partial_\nu \Phi_j] - \xi^\mu_k \left(\partial^{(\text{expl})}_\mu \mathscr{L}\right) - \mathscr{L} \partial_\mu \xi^\mu_k + \partial_\mu \Omega^\mu_k(\Phi_j, x) = 0$$

- kanonischer Energie-Impuls-Tensor

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\nu \Phi_j - \mathscr{L} \delta^\mu{}_\nu$$

- Symmetriebedingung:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_j} \Xi_{jk} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu \Xi_{jk} + \partial_\mu \xi^\nu_k \Theta^\mu{}_\nu - \xi^\nu_k \left(\partial^{(\text{expl})}_\nu \mathscr{L}\right) + \partial_\mu \Omega^\mu_k(\Phi_j, x) = 0 \qquad \text{(SB)}$$

- muss für beliebige Felder Φ_j gelten

- Folgerungen für Lösungen der Feldgleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_j}$$

- Viererdivergenz des Energie-Impulstensors

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_\nu = \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)}\right)\partial_\nu \Phi_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)}\partial_\mu \partial_\nu \Phi_j - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_j}\partial_\nu \Phi_j - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)}\partial_\mu \partial_\nu \Phi_j - \partial_\nu^{(\text{expl})}\mathscr{L}$$
$$= -\partial_\nu^{(\text{expl})}\mathscr{L}.$$

- „blauer Term“

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_j}\Xi_{jk} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)}\partial_\mu \Xi_{jk} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)}\Xi_{jk}\right)$$

- Schlussfolgerung: Noether-Ströme

$$j_k^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)}\Xi_{jk} + \Theta^\mu{}_\nu \xi_k^\nu + \Omega_k^\mu$$

  erfüllen Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0$$

- jede unabhängige Lie-Symmetrie $\Rightarrow$ erhaltene Noether-Ladung

$$Q_k = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, j_k^0(x) \Rightarrow \dot{Q}_k = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \partial_t j_k^0 = -\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \vec{\nabla}\vec{j}_k = 0$$

- NB: Q_k ist Lorentzinvariante $\Leftrightarrow$ Kontinuitätsgleichung für j_k^μ gilt (Beweis mit 4D Gaußschem Integralsatz [Hee24])
- Poincaré-Symmetrie
- Minkowski-Raumzeit: symmetrisch unter Raum-Zeit-Translationen und eigentlich orthochronen Lorentz-Transformationen
- Noether-Analysis: brauche infinitesimale Transformationen
- Raum-Zeit-Translationen

- $x'^\mu = x^\mu + a^\mu \Rightarrow$ infinitesimale Transformation

$$x'^\mu = x^\mu + \delta a^\mu = x^\mu - \delta a^\kappa \xi^\mu_\kappa(\underline{x}) \Rightarrow \xi^\mu_\kappa = -\delta^\mu_\kappa.$$

- spezielle orthochrone Lorentz-Transformationen
  - $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ mit $\hat{\Lambda} \in \mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$
  - infinitesimal $\delta \underline{x} = \delta \hat{\omega} \underline{x}$

$$(\mathbb{1} + \delta\hat{\omega})^{\mathrm{T}} \hat{\eta} (\mathbb{1} + \delta\hat{\omega}) = \hat{\eta} + \delta\hat{\omega}^{\mathrm{T}} \eta + \hat{\eta}\delta\hat{\omega} = \hat{\eta}$$
$$\Rightarrow \delta\hat{\omega}^{\mathrm{T}} \eta + \hat{\eta}\delta\hat{\omega} = (\eta\delta\hat{\omega})^{\mathrm{T}} + \hat{\eta}\delta\hat{\omega} = 0$$
$$\Rightarrow \eta\delta\hat{\omega} = (\delta\omega_{\mu\nu}) = -(\delta\omega_{\nu\mu})$$

  - manifest kovariante Schreibweise

$$\delta x^\mu = \delta\omega_{\alpha\beta}\eta^{\mu\alpha}x^\beta = \frac{1}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\alpha}x^\beta - \eta^{\mu\beta}x^\alpha) \Rightarrow \xi^{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(x^\alpha\eta^{\mu\beta} - x^\beta\eta^{\mu\alpha})$$

  - Boosts

$$\delta\hat{\omega}_{\mathrm{B}}(\vec{n}) = \hat{\eta}\begin{pmatrix} 0 & \vec{n}^{\mathrm{T}} \\ -\vec{n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{n}^{\mathrm{T}} \\ \vec{n} & 0 \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot \hat{\vec{k}}, \quad \hat{k}_j = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_j^{\mathrm{T}} \\ \vec{e}_j & 0 \end{pmatrix}$$

  - Drehungen

$$\delta\hat{\omega}^\mu{}_\nu = \hat{\eta}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{amn}n^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_{amn}n^a \end{pmatrix} = \vec{n} \cdot \hat{\vec{j}}, \quad j_{kmn} = -\epsilon_{kmn}$$

  - infinitesimale Drehung

$$\delta x^0 = 0, \quad \delta\vec{x} = -\delta\varphi\,\vec{e}_m n^k \epsilon_{kmn} x^n = \delta\varphi\,\vec{n} \times \vec{x}$$

- Übung: zeige, dass $\exp(\eta\hat{\vec{k}} \cdot \vec{n})$ Boosts mit Rapidität η in Richtung von $\vec{n}$ und $\exp(\varphi\hat{\vec{j}} \cdot \vec{n})$ Drehungen um den Winkel φ um die Drehachse $\vec{n}$ erzeugen!
- übliches Transformationsverhalten der Felder
  - Felder Skalare unter Translationen

$$\Phi'_i(x') = \Phi_i(x) = \Phi_i(x' - a) \Rightarrow \delta\Phi_i = \Phi'_i(x') - \Phi_i(x) = 0 \Rightarrow \Xi_{ik} = 0$$

  - Falls $\mathscr{L}$ nicht explizit von $\underline{x}$ abhängt $\Rightarrow$ kann $\Omega^\mu = 0$ setzen

- Noether-Ströme = kanonischer Energie-Impuls-Tensor
- (lokale!) Energie-Impulserhaltung

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0.$$

- $(\Theta^{0\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \vec{g} \end{pmatrix}$
- ε: Energiedichte
- $\vec{g}$: Impulsdichte

- eigentlich orthochrone Lorentz-Trafos: Felder transformieren unter irgendeiner (endlichdimensionalen) linearen Darstellung der $SO(1,3)^\uparrow$

$$\Phi_i'(x') = M_{ij}(\Lambda)\Phi_j(x) = M_{ij}(\Lambda)\Phi_j(\hat{\Lambda}^{-1}x')$$

- Darstellungseigenschaft

$$\hat{M}(\hat{\Lambda}_1)\hat{M}(\hat{\Lambda}_2) = \hat{M}(\hat{\Lambda}_1\hat{\Lambda}_2)$$

- infinitesimal

$$\delta\phi_i = \frac{1}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}\phi_j \Rightarrow \Xi_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}\phi_j,$$

- NB: für Vektorfelder sind die $\hat{\Sigma}^{\alpha\beta}$ durch die $\hat{\vec{k}}$ und $\hat{\vec{j}}$ gegeben, denn

$$A'^\mu(\underline{x}') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\underline{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\hat{\Lambda}^{-1}\underline{x}')$$

- üblicherweise ist $\mathscr{L}$ Skalar unter $SO(1,3)^\uparrow$-Transformationen und nicht explizit $\underline{x}$-abhängig $\Rightarrow$ kann $\Omega^\mu = 0$ wählen
- Noether-Ströme kanonischer Vierer-Drehimpulstensor

$$J^{\mu\alpha\beta} = -J^{\mu\beta\alpha} = x^\alpha\Theta^{\mu\beta} - x^\beta\Theta^{\mu\alpha} + S^{\mu\alpha\beta} \quad \text{with} \quad S^{\mu\alpha\beta} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}\phi_j.$$

- für Skalarfeld $\Xi_{ij}^{\mu\nu} = 0$
- dann für reine Boosts ($\delta\omega_{ab} = 0$)

$$J^{\mu 0\beta} = x^0\Theta^{\mu\beta} - x^\beta\Theta^{\mu 0}$$

- drei Erhaltungsgrößen ($\beta \in \{1,2,3\}$) ($\beta = 0$ liefert einfach 0); mit E Gesamtenergie und $\vec{P}$ Gesamtimpuls

$$K^\beta = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x (x^0 \Theta^{0\beta} - x^\beta \Theta^{00}) = \text{const}$$
$$\Rightarrow \vec{K} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x} (t \vec{g} - \vec{x} \varepsilon) = \vec{P} t - \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x} \vec{x} \varepsilon = -\vec{R}_0 = \text{const}$$

- Energie-Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig

$$\vec{R} := \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x} \vec{x} \varepsilon \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{E} t$$

- NB: gleiche Analyse in Newtonscher (Kontinuums-)Mechanik: massengewichteter Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig
- in Relativitätstheorie ist die Gesamtenergie Maß für Trägheit!

• Pseudoeichtransformationen

- Stromdichten erhaltener Ladungen nicht eindeutig bestimmt: Sei $\Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\mu\nu}$ eine beliebige Funktion der Felder und $\underline{x} \Rightarrow$

$$j'^\mu = j^\mu + \partial_\nu \Omega^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\mu j'^\mu = \partial_\mu j^\mu$$

- Erhaltung gilt dann auch für neue Stromdichte, wenn $\partial_\mu j^\mu = 0$
- Noether-Stromdichten nicht eindeutig durch Symmetrien bestimmt
- aber Gesamtladung: mit Gaußschem Integralsatz und Verschwinden der Ladungsdichte im räumlich Unendlichen

$$Q' = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x} j'^0 = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 \vec{x} [j^0 + \partial_n \Omega^{0n}] = 0$$

• Belinfante-Rosenfeld-Tensor

- Uneindeutigkeit des Energie-Impuls- und Vierdrehimpulstensors
- Pseudo-Eichtransformationen: kann Energie-Impulstensor immer symmetrisch wählen hat manchmal Vorteile: z.B. eichinvarianter Energie-Impulstensor in Elektrodynamik (s. Übungen)
- Lorentzinvarianz $\Rightarrow$ Viererdrehimpulstensor

$$J^{\mu\alpha\beta} = -J^{\mu\beta\alpha} = x^\alpha \Theta^{\mu\beta} - x^\beta \Theta^{\mu\alpha} + S^{\mu\alpha\beta},$$
$$\partial_\mu J^{\mu\rho\nu} = \Theta^{\rho\nu} - \Theta^{\nu\rho} + \partial_\mu S^{\mu\rho\nu} = 0.$$

- Pseudoeichtransformation

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho \Omega^{\mu\rho\nu}, \quad \Omega^{\mu\rho\nu} = -\Omega^{\rho\mu\nu}$$

- suche $\Omega^{\mu\rho\nu}$ so, dass $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ [Bel40, Ros40]

$$\Omega^{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}(S^{\mu\nu\rho} - S^{\rho\nu\mu} + S^{\nu\mu\rho}),$$
$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho(S^{\mu\nu\rho} + S^{\nu\mu\rho}) - \frac{1}{2}(\Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu}) = \frac{1}{2}(\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}\partial_\rho(S^{\mu\nu\rho} + S^{\nu\mu\rho})$$

- neuer Viererdrehimpulstensor

$$\tilde{J}^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} \Rightarrow \partial_\mu \tilde{J}^{\mu\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + x^\alpha \partial_\mu T^{\mu\beta} - T^{\beta\alpha} - x^\beta \partial_\mu T^{\mu\beta} = 0$$

- $\Rightarrow$ Pseudoeichtransformation des kanonischen Viererdrehimpulstensors:

$$\begin{aligned}\tilde{J}^{\mu\alpha\beta} &= x^\alpha \Theta^{\mu\beta} - x^\beta \Theta^{\mu\alpha} + x^\alpha \partial_\rho \Omega^{\mu\rho\beta} - x^\beta \partial_\rho \Omega^{\mu\rho\alpha} \\ &= J^{\mu\alpha\beta} - S^{\mu\alpha\beta} + \partial_\rho(x^\alpha \Omega^{\mu\rho\beta} - x^\beta \Omega^{\mu\rho\alpha}) - (\Omega^{\mu\alpha\beta} - \Omega^{\mu\beta\alpha}) \\ &= J^{\mu\alpha\beta} + \partial_\rho \Omega^{\mu\rho\alpha\beta}, \quad \Omega^{\mu\rho\alpha\beta} = x^\alpha \Omega^{\mu\rho\beta} - x^\beta \Omega^{\mu\rho\alpha}\end{aligned}$$

5 Bibliography

Bibliography

Literatur

[Bel40] F. J. Belinfante, On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields, Physica **7**, 449 (1940), `https://doi.org/10.1016/S0031-8914(40)90091-X`.

[Ein05] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. Phys. **322**, 891 (1905), `https://doi.org/10.1002/andp.19053221004`.

[Ein09] A. Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 24 edn. (2009), `https://doi.org/10.1007/978-3-540-87777-6`.

[Hee18] H. van Hees, *Theoretische Physik 1 für das Lehramt L3*, Goethe-Universität Frankfurt (2018), https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/theo1-l3.pdf.

[Hee24] H. v. Hees, Special Relativity (2024), https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/pf-faq/srt.pdf.

[Hee25] H. van Hees, *Mechanik für das gymnasiale Lehramt*, Springer Spektrum, Berlin (2025), https://doi.org/10.1007/978-3-662-69047-5.

[Jac14] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, Walter de Gruyter, Berlin, Boston, 4 edn. (2014).

[JO01] J. D. Jackson and L. B. Okun, Historical roots of gauge invariance, Rev. Mod. Phys. **73**, 663 (2001), https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.663.

[LL92] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, vol. 2 of *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Akademie Verlag, Berlin (1992).

[Noe18] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 235 (1918), https://doi.org/10.1080/00411457108231446.

[Oku89] L. B. Okun, The concept of mass, Physics Today **42**, 31 (Juni 1989), https://doi.org/10.1063/1.881171.

[Pla06] M. Planck, Das Relativitätsprinzip und die Grundgleichungen der Mechanik, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **8**, 136 (1906), https://de.wikisource.org/wiki/Das_Prinzip_der_RelativitÃďt_und_die_Grundgleichungen_der_Mechanik.

[Ros40] L. J. H. C. Rosenfeld, Sur le tenseur d'impulsion-énergie, Roy. Belg. Memoirs de Classes de Science **18**, 063504 (1940).

[Sch87] U. E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 2 edn. (1987).

[Sop08] D. E. Soper, *Classical field theory*, Dover Publications, Minneola, New York (2008).

[SU01] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, *Relativity, Groups, Particles*, Springer, Wien (2001).