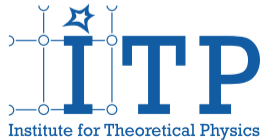


# Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

## Vorlesung 4: Das Schalenmodell

Hendrik van Hees

Goethe-Universität Frankfurt



# Outline

Das Schalenmodell

Bibliography

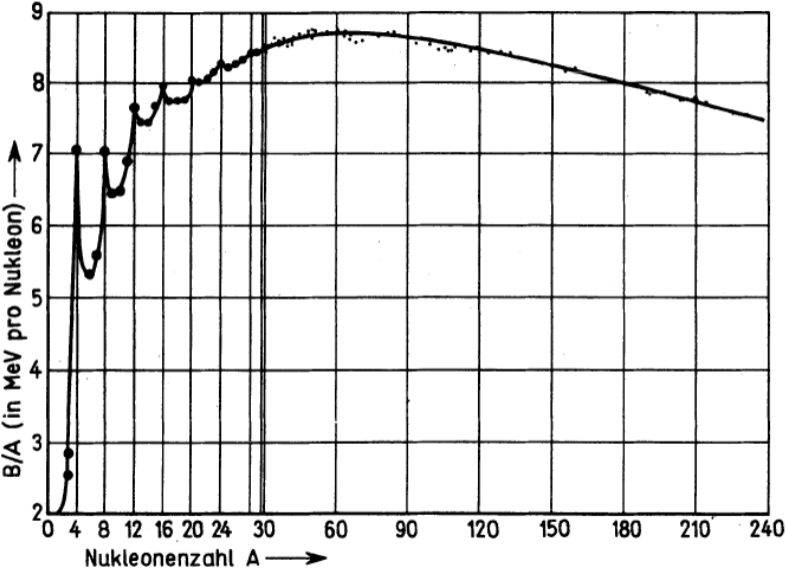
# Das Schalenmodell

Literatur: [MK02, Kra88]

# Motivation

- ▶ wie versteht man Bindungsenergien und „magische Zahlen“ für  $(Z, N)$ ?
- ▶  $Z/N_{\text{magisch}}$ : besonders **hohe Bindungsenergien** pro Nukleon
- ▶ **große Anregungsenergien**
- ▶ viele **stabile Isotope** im Vergleich zu Kernen mit  $Z/N_{\text{magisch}} \pm 1$
- ▶ magische Kerne besonders häufig
- ▶ Wirkungsquerschnitt für **Neutronen-Einfang** besonders niedrig für magische Kerne
- ▶ besonders hoch für Kerne mit  $N = N_{\text{magisch}} - 1$

# Motivation



# Vielteilchentheorie

- ▶ Quantentheorie **vieler Teilchen**
- ▶ Ununterscheidbarkeit gleichartiger Teilchen: **Bosonen oder Fermionen**
  - ▶ klassische Mechanik: kann individuelle Teilchen in Vielteilchensystem durch Anfangszustand kennzeichnen und entlang seiner Bahn verfolgen
  - ▶ Quantentheorie: **Heisenbergsche Unschärferelation**  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$
  - ▶ kann Anfangszustand bzgl. Ort und Impuls nicht simultan scharf präparieren
  - ▶ „Wellenpakete“ verbreitern sich i.a. mit der Zeit  $\Rightarrow$  Teilchen nicht durch Anfangsorte und Bahnverfolgung „individualisierbar“
  - ▶ können nur durch „**intrinsische Quantenzahlen**“ unterschieden werden (Masse, Ladung(en), Spin, ...)

# Vielteilchentheorie

- ▶ „1. Quantisierung“ (nur nichtrelativistisch!)
  - ▶ Teilchenzahl  $N$  ununterscheidbarer Teilchen mit Masse  $\mu$  und Spin  $s \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$ ,  $\sigma (= m_s) \in \{-s, -s + 1, \dots, s - 1, s\}$
  - ▶ z.B. Wellenfunktionen in der **Orts-Spin-Darstellung**:  
$$\psi_{\pm}(t, \vec{x}_1, \sigma_1; \vec{x}_2, \sigma_2; \dots \vec{x}_N, \sigma_N) = \langle \vec{x}_1, \sigma_1; \vec{x}_2, \sigma_2; \dots \vec{x}_N, \sigma_N | \psi(t) \rangle_{\pm}$$
  - ▶ **symmetrisch** unter Vertauschung zweier Argumente  $(\xi_j) = (\vec{x}_j, \sigma_j)$  (+ **Bosonen**)
  - ▶ **antisymmetrisch** unter Vertauschung zweier Argumente  $(\xi_j) = (\vec{x}_j, \sigma_j)$  (– **Fermionen**)
  - ▶ für allgemeine **Permutation** von Indizes:

$$\hat{P}_N \psi_{\pm}(t, \xi_1, \dots, \xi_N) = \psi_{\pm}(t, \xi_{P(1)}, \dots, \xi_{P(N)}) = (\pm 1)^{\sigma(P)} \psi_{\pm}(t, \xi_1, \dots, \xi_N),$$
$$\sigma(P) = \begin{cases} 0 & \text{gerade Zahl von Vertauschungen, um Permutation zu erhalten} \\ 1 & \text{ungerade Zahl von Vertauschungen, um Permutation zu erhalten} \end{cases}$$

# Vielteilchentheorie

## ▶ Fock-Zustände

- ▶  $\phi_j(\xi)$ : beliebiges VONS von **Einteilchenwellenfunktionen**  $\psi_j(\xi)$
- ▶ dann Basen für Bosonen (Fermionen) **symmetrisierte (antisymmetrisierte)** Produktzustände

$$\Psi_{j_1, \dots, j_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} \prod_{k=1}^N \psi_{P(j_k)}(\xi_{j_k})$$

- ▶  $S_N$ : Menge aller Permutationen von  $N$  Elementen („**Symmetrische Gruppe**“)
  - ▶ Gruppenoperation: Hintereinanderausführung von Permutationen  $P_1 \circ P_2$
- ▶ für Fermionen „**Slater-Determinanten**“



# Vielteilchentheorie

- ▶ Hamilton-Operator: Hierarchie von  $k$ -Teilchen-Beiträgen  $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \sum_{k=1}^N \left[ \frac{1}{2\mu} \vec{\mathbf{p}}_k^2 + V^{(1)}(\xi_k) \right],$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2 < k_1} V^{(2)}(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}),$$

$$\mathbf{H}^{(3)} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2 > k_1} \sum_{k_3 > k_2} V^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

...

- ▶ Energieeigenwertproblem mit  $\mathbf{H} = \sum_k \mathbf{H}^{(k)}$  kann nicht analytisch gelöst werden

- ▶ **Hartree-Fock-Verfahren**
  - ▶ Idee: Ansatz mit Fock-Zustand  $\Rightarrow$  selbstkonsistente Gleichung für effektives **Ein-Teilchen-Potential für Eigenwertgleichung für Einteilchenproblem**
  - ▶ numerisch durch Iteration lösbar
  - ▶ weitere Näherungen durch Berücksichtigung von **höheren Korrelationen**
  - ▶ Literatur für Kernphysik: [\[RS80\]](#)

# Schalenmodell

- ▶ Idee: verwende **phänomenologisches effektives Einteilchenpotential** (s. Fermi-Modell, kollektives Kernmodell)
- ▶ (zunächst) **Zentralpotential**
- ▶ relativ flacher **Potentialtopf** innerhalb des Kerns vom Radius  $R = r_0 A^{1/3}$
- ▶ schnell abfallend am Rand
- ▶ löse Einteilchen-Energieeigenwertproblem für einzelnes Nukleon
- ▶ fülle **Schalen** a la Fermi-Modell

# Schalenmodell

- ▶ Modellpotentiale:
  - ▶ Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } 0 \leq r \leq R, \\ \infty & \text{für } r > R. \end{cases}$$

- ▶ 3D kugelsymmetrischer harmonischer Oszillator

$$V(r) = \frac{\mu\omega^2}{2} r^2$$

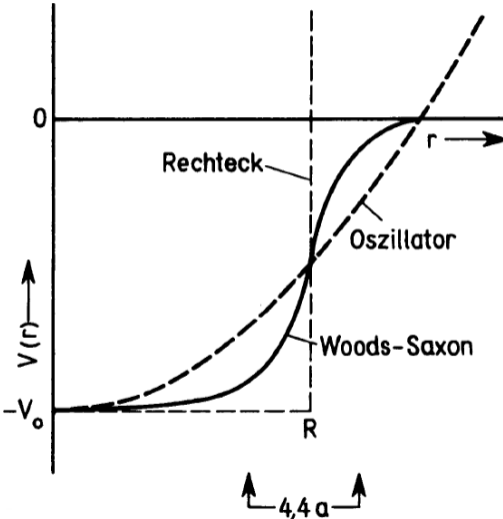
- ▶ fallen zwar nicht  $\rightarrow 0$  ab für  $\rightarrow \infty$ , aber kein so großer Fehler für niedrigste Energiezustände
- ▶ dafür analytisch lösbar
- ▶ **Woods-Saxon-Potential** (ursprünglich für Nukleon-Kernstreuung [\[WS54\]](#))

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(R - r)/a]}$$

- ▶ nicht analytisch lösbar

# Schalenmodell

► Potentiale für Schalenmodell



# Schalenmodell

- ▶ Zentralpotentialproblem (Ortsdarstellung/Wellenmechanik)

$$\mathbf{H}\psi(\vec{x}) = \left[ \frac{1}{2\mu} \vec{\mathbf{p}}^2 + V(r) \right] \psi(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \partial_r^2 [r\psi(\vec{x})] + \left[ \frac{\vec{\mathbf{L}}^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi(\vec{x}),$$

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{p}} = -i\hbar \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\nabla}$$

- ▶ Kugelsymmetrie:  $[\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}] = 0$

- ▶ **Energieeigenwertproblem**: Simultane Eigenfunktionen für  $\mathbf{H}$ ,  $\vec{\mathbf{L}}^2$ ,  $\mathbf{L}_z$

$$\mathbf{H}u_{\ell m} = E u_{\ell m}, \quad \vec{\mathbf{L}}^2 u_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) u_{\ell m}, \quad \mathbf{L}_z u_{\ell m} = m u_{\ell m}.$$

- ▶  $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell\}$ .

$$u_{\ell m}(\vec{x}) \equiv u_{\ell m}(r, \vartheta, \varphi) = R_{\ell}(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} \psi_{\ell}(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

- ▶  $Y_{\ell m}$ : **Kugelflächenfunktionen**

# Schalenmodell

- ▶ Radialwellenfunktion

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \psi''_{E\ell}(r) + \left[ \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi_{E\ell}(r) = E \psi_{E\ell}(r).$$

- ▶ **H selbstadjungiert**: Randbedingung

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r R_{E\ell}(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \psi_{E\ell}(r) = 0.$$

- ▶ zu gegebenen  $E$  und  $\ell \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow (2\ell + 1)$  Zustände zu verschiedenem  $m \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell\}$
- ▶ Energie-Entartung wegen **Drehsymmetrie**
- ▶ Energieeigenwerte hängen nicht von  $m$  ab

# Schalenmodell

## ► Kastenpotential

- Lösungen  $R_{E\ell}$  zusätzlich eingeschränkt durch Randbedingung  $R_{E\ell}(R) = 0$
- wegen RB bei  $r = 0$  eindeutige Lösung: **sphärische Besselfunktionen**  
 $R_{E\ell}(r) = N j_\ell(k_E r)$ ,  $k_E = \sqrt{2\mu E}/\hbar$  [Hee18, CH10]
- zu jedem  $\ell$ : beliebig viele Energieeigenwerte  $\Leftrightarrow$  Nullstellen:  $j_\ell(k_E R) = 0$

$$j_\ell(\rho) = (-\rho)^\ell \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^\ell \frac{\sin \rho}{\rho} \Rightarrow j_\ell(\rho) \underset{\rho \rightarrow 0}{\cong} \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell + 1)!} \rho^\ell.$$

- analytische Funktion für  $\rho \in \mathbb{R}$  (insbesondere bei  $\rho = 0$ )
- zu jedem  $\ell$  gibt es unendlich viele diskrete Energieeigenwerte  $E_{n,\ell}$ , die durch die **Nullstellen der Besselfunktion**  $\nu_{\ell,n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gemäß der RB

$$R_{n\ell}(r) = N_{n\ell} j_\ell(k_{n\ell} r) = 0, \quad k_{n\ell} R = \nu_{\ell,n} \Rightarrow E_{n\ell} = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \nu_{\ell,n}^2$$

bestimmt sind.



# Schalenmodell

- ▶ **Harmonischer radialsymmetrischer Oszillator**
- ▶ Lösungen der Radialgleichung

$$R_{n_r \ell}(r) = \sqrt{\frac{2n_r!}{(n_r + \ell + 1/2)!}} \frac{r^\ell}{b^{\ell+3/2}} L_{n_r}^{\ell+1/2}\left(\frac{r^2}{b^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2}\right)$$

- ▶  $b = \sqrt{\hbar/(\mu\omega)}$ ,  $L_n^k$ : assoziierte Laguerre-Polynome,  $n_r \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ ,  $x! = \Gamma(x+1)$
- ▶ Energieeigenwerte

$$E_{n_r, \ell} = \hbar\omega \left(2n_r + \ell + \frac{3}{2}\right)$$

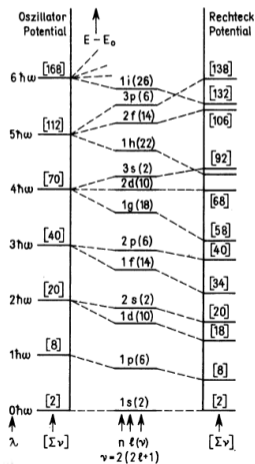
- ▶  $E_{n_r, \ell}$  hängt nur von **Hauptquantenzahl**  $N = 2n_r + \ell$  ab;  $N \in \mathbb{N}_0$
- ▶ **höherer Entartungsgrad** als nur von Rotationssymmetrie
- ▶ zusätzliche **dynamische Symmetrie** bei harmonischem sphärischem Oszi:
- ▶ **Symmetriegruppe SU(3)**

# Schalenmodell

- ▶ **Entartungsgrade**
  - ▶  $N = 2n_r + \ell = 0 \Rightarrow \ell = 0: g = 1$
  - ▶  $N = 2n_r + \ell = 1 \Rightarrow \ell = 1: g = 3$
  - ▶  $N = 2n_r + \ell = 2 \Rightarrow \ell \in \{0, 2\}: g = 6$
  - ▶  $N = 2n_r + \ell = 3 \Rightarrow \ell \in \{1, 3\}: g = 10$
  - ▶  $g_N = (N + 1)(N + 2)/2$
- ▶ **Pauli-Prinzip**  $\Rightarrow$  alle Level von unten nach oben gefüllt
- ▶ **Spin 1/2**  $\Rightarrow$  jeder Energiezustand kann mit 2 gleichartigen Nukleonen gefüllt werden
- ▶ **magische Zahlen**: oberstes Energielevel vollständig gefüllt
  - ▶ bis  $N = 0$  gefüllt:  $2 \cdot 1 = 2$
  - ▶ bis  $N = 1$  gefüllt:  $2 \cdot (1 + 3) = 8$
  - ▶ bis  $N = 2$  gefüllt:  $2 \cdot (1 + 3 + 6) = 20$
  - ▶ bis  $N = 3$  gefüllt:  $2 \cdot (1 + 3 + 6 + 10) = 40$
  - ▶  $M_N = (N + 1)(N + 2)(N + 3)/3: 2, 8, 20, 40, 70, 112, \dots$
- ▶ **Literatur**: [Fli18, Fra71]

# Schalenmodell

## ► Energie-Level



- NB: Oszillatorpotential hier  $n = n_r + 1$
- empirische magische Zahlen: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

# Schalenmodell

- ▶ Lösung: **Spin-Bahn-Kopplung**
- ▶ M. Goeppert Mayer [\[May50a, May50b\]](#); O. Haxel, J. H. D. Jensen and H. E. Suess [\[HJS50\]](#)
- ▶ Physik-Nobelpreis an Goeppert Mayer und H. D. Jensen (1963)

$$\mathbf{H}_{\ell s} = V_{\ell s}(\mathbf{R}) \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} / \hbar^2$$

- ▶ **Gesamtdrehimpuls:**  $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}, [\mathbf{L}_j, \mathbf{S}_k] = 0$
- ▶ Nukleon:  $s = 1/2$
- ▶ **Addition von Drehimpulsen:** für gegebenes  $\ell$  ergibt sich  $j \in \{|\ell - 1/2|, \ell + 1/2\}$  (für  $\ell = 0$  ist  $j = +1/2$ ).
- ▶ **Energieeigenzustände:** VONS aus Eigenvektoren von  $\mathbf{H}$ ,  $\vec{\mathbf{J}}^2$ ,  $\vec{\mathbf{L}}^2$ ,  $\mathbf{L}_3$  und  $\mathbf{S}_3$  (auch Eigenvektoren von  $\mathbf{J}_z$  mit  $m_J = m_\ell + m_s$ )
- ▶ Eigenwerte  $E = E_{j\ell}$ ,  $j(j+1)\hbar^2$ ,  $\ell(\ell+1)\hbar^2$ ,  $s(s+1)\hbar^2 = 3\hbar^2/4$

$$\vec{\mathbf{j}}^2 = (\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}})^2 = \vec{\mathbf{L}}^2 + \vec{\mathbf{S}}^2 + 2\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} \Rightarrow \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{J}}^2 - \vec{\mathbf{L}}^2 - \vec{\mathbf{S}}^2)$$

# Schalenmodell

- ▶ Erwartungswert von  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  in Energieeigenzustand

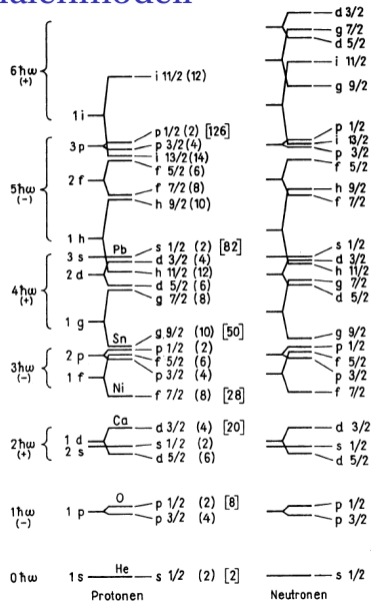
$$\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - 3/4] = \begin{cases} \hbar^2 \ell/2 & \text{für } j = \ell + 1/2, \\ -\hbar^2(\ell+1)/2 & \text{für } j = \ell - 1/2. \end{cases}$$

- ▶ Potential in Radialgleichung

$$V_{\text{tot}}(r) = \begin{cases} V(r) + \frac{1}{2} V_{\ell s}(r) \ell & \text{für } j = \ell + 1/2, \\ V(r) - \frac{1}{2} V_{\ell s}(r)(\ell + 1) & \text{für } j = \ell - 1/2. \end{cases}$$

- ▶ empirisch  $V_{\ell s}(r) < 0 \Rightarrow E_{\ell-1/2,\ell} > E_{\ell+1/2,\ell}$
- ▶ Spin-Bahn-Kopplung führt zu Aufspaltung der Level für gegebenes  $\ell$ ,  
 $\Delta E_{j\pm 1/2} \propto 2\ell + 1$
- ▶ für geeignete Wahl von  $V_{\ell s}$ : gute Erklärung für **beobachtete „magische Zahlen“**

# Schalenmodell



- ▶ Bezeichnung der Level:  
 $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots \hat{=} s, p, d, f, g, h, i, \dots$
- ▶  $\Rightarrow nlj$ , wobei  $l$  durch o.g. Buchstaben bezeichnet wird
- ▶ spektroskopische Bezeichnung wie in der Atomphysik
- ▶ Levels angepasst an [Kli52]
- ▶ mehr empirische Regeln, z.B. gg-Kerne haben immer  $J = 0$  und Parität  $(-1)^l = +1$ :  
**gleichartige Nukleonen immer gepaart**
- ▶ Literatur [MK02, GMJ55]

# Bibliography

- [CH10] W. Cassing and H. v. Hees, *Mathematische Methoden für Physiker*, Universität Gießen (2010), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/maphy.pdf>.
- [Fli18] T. Fließbach, *Quantenmechanik*, Springer Spektrum, Berlin, 6 edn. (2018), <https://doi.org/10.1007/978-3-662-58031-8>.
- [Fra71] W. Franz, *Quantentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1971), <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65289-9>.
- [GMJ55] M. Goeppert-Mayer and J. H. D. Jensen, *Elementary theory of nuclear shell structure*, John Wiley&Sons, New York, London (1955).
- [Hee18] H. van Hees, *Theoretische Physik 3 für das Lehramt L3*, Goethe-Universität Frankfurt (2018), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/theo3-13.pdf>.

# Bibliography

- [HJS50] O. Haxel, J. H. D. Jensen and H. E. Suess, Modellmäßige Deutung der ausgezeichneten Nukleonenzahlen im Kernbau, *Zeitschrift für Physik* **128**, 295 (1950), <https://doi.org/10.1007/BF01333077>.
- [Kli52] P. F. A. Klinkenberg, Tables of Nuclear Shell Structure, *Rev. Mod. Phys.* **24**, 63 (1952), <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.24.63>.
- [Kra88] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore (1988).
- [May50a] M. G. Mayer, Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. I. empirical evidence, *Physical Review* **78**, 16 (1950), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.78.16>.
- [May50b] M. G. Mayer, Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. II. Theoretical considerations, *Physical Review* **78**, 22 (1950), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.78.22>.



# Bibliography

- [MK02] T. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik - Eine Einführung*, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 7 edn. (2002),  
<https://doi.org/10.1007/978-3-322-84876-5>.
- [RS80] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1980).
- [WS54] R. D. Woods and D. S. Saxon, Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering, *Phys. Rev.* **95**, 577 (1954),  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.95.577>.