

Einführung in die theoretische Kern- und
Teilchenphysik
Vorlesung 4: Das Schalenmodell

Hendrik van Hees

Inhaltsverzeichnis

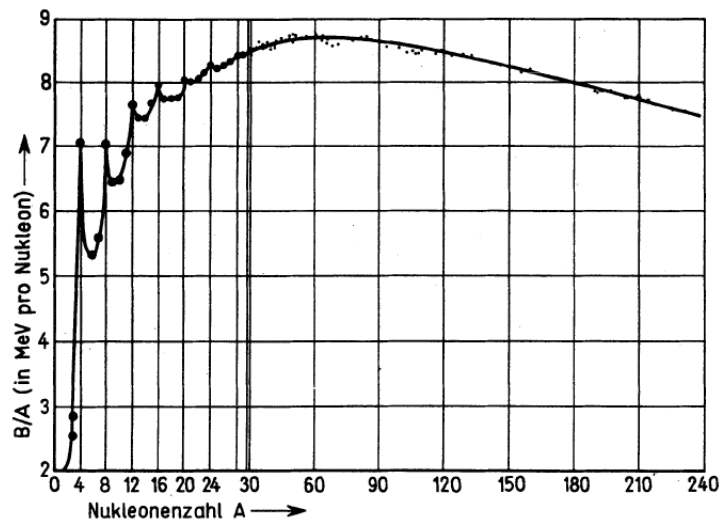
1	Das Schalenmodell	1
2	Bibliography	11
1	Das Schalenmodell	

Das Schalenmodell

Literatur: [\[MK02, Kra88\]](#)

Motivation

- wie versteht man Bindungsenergien und „magische Zahlen“ für (Z, N) ?
- Z/N_{magisch} : besonders **hohe Bindungsenergien** pro Nukleon
- **große Anregungsenergien**
- viele **stabile Isotope** im Vergleich zu Kernen mit $Z/N_{\text{magisch}} \pm 1$
- magische Kerne besonders häufig
- Wirkungsquerschnitt für **Neutronen-Einfang** besonders niedrig für magische Kerne
- besonders hoch für Kerne mit $N = N_{\text{magisch}} - 1$



Vielteilchentheorie

- Quantentheorie **vieler Teilchen**
- Ununterscheidbarkeit gleichartiger Teilchen: **Bosonen oder Fermionen**
 - klassische Mechanik: kann individuelle Teilchen in Vielteilchensystem durch Anfangszustand kennzeichnen und entlang seiner Bahn verfolgen
 - Quantentheorie: **Heisenbergsche Unschärferelation** $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$

- kann Anfangszustand bzgl. Ort und Impuls nicht simultan scharf präparieren
- „Wellenpakete“ verbreitern sich i.a. mit der Zeit \Rightarrow Teilchen nicht durch Anfangsorte und Bahnverfolgung „individualisierbar“
- können nur durch „**intrinsische Quantenzahlen**“ unterschieden werden (Masse, Ladung(en), Spin, ...)

- „**1. Quantisierung**“ (nur nichtrelativistisch!)

- Teilchenzahl N ununterscheidbarer Teilchen mit Masse μ und Spin $s \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$, $\sigma (= m_s) \in \{-s, -s + 1, \dots, s - 1, s\}$
- z.B. Wellenfunktionen in der **Orts-Spin-Darstellung**: $\psi_{\pm}(t, \vec{x}_1, \sigma_1; \vec{x}_2, \sigma_2; \dots \vec{x}_N, \sigma_N) = \langle \vec{x}_1, \sigma_1; \vec{x}_2, \sigma_2; \dots \vec{x}_N, \sigma_N | \psi(t) \rangle_{\pm}$
- **symmetrisch** unter Vertauschung zweier Argumente $(\xi_j) = (\vec{x}_j, \sigma_j)$ (+ **Bosonen**)
- **antisymmetrisch** unter Vertauschung zweier Argumente $(\xi_j) = (\vec{x}_j, \sigma_j)$ (- **Fermionen**)
- für allgemeine **Permutation** von Indizes:

$$\hat{P}_N \psi_{\pm}(t, \xi_1, \dots, \xi_N) = \psi_{\pm}(t, \xi_{P(1)}, \dots, \xi_{P(N)}) = (\pm 1)^{\sigma(P)} \psi_{\pm}(t, \xi_1, \dots, \xi_N),$$

$$\sigma(P) = \begin{cases} 0 & \text{gerade Zahl von Vertauschungen, um Permutation zu erhalten} \\ 1 & \text{ungerade Zahl von Vertauschungen, um Permutation zu erhalten} \end{cases}$$

- **Fock-Zustände**

- $\phi_j(\xi)$: beliebiges VONS von **Einteilchenwellenfunktionen** $\psi_j(\xi)$
- dann Basen für Bosonen (Fermionen) **symmetrisierte (antisymmetrisierte) Produktzustände**

$$\Psi_{j_1, \dots, j_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} (\pm 1)^{\sigma(P)} \prod_{k=1}^N \psi_{P(j_k)}(\xi_{j_k})$$

- S_N : Menge aller Permutationen von N Elementen („**Symmetrische Gruppe**“)
- * Gruppenoperation: Hintereinanderausführung von Permutationen $P_1 \circ P_2$
- für Fermionen „**Slater-Determinanten**“

- Hamilton-Operator: Hierarchie von k -Teilchen-Beiträgen $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{2\mu} \vec{\mathbf{p}}_k^2 + V^{(1)}(\xi_k) \right],$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2 < k_1} V^{(2)}(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}),$$

$$\mathbf{H}^{(3)} = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2 > k_1} \sum_{k_3 > k_2} V^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

...

- Energieeigenwertproblem mit $\mathbf{H} = \sum_k \mathbf{H}^{(k)}$ kann nicht analytisch gelöst werden
- **Hartree-Fock-Verfahren**
 - Idee: Ansatz mit Fock-Zustand \Rightarrow selbstkonsistente Gleichung für effektives **Ein-Teilchen-Potential für Eigenwertgleichung für Einteilchenproblem**
 - numerisch durch Iteration lösbar
 - weitere Näherungen durch Berücksichtigung von **höheren Korrelationen**
 - Literatur für Kernphysik: [RS80]

Schalenmodell

- Idee: verwende **phänomenologisches effektives Einteilchenpotential** (s. Fermi-Modell, kollektives Kernmodell)
- (zunächst) **Zentralpotential**
- relativ flacher **Potentialtopf** innerhalb des Kerns vom Radius $R = r_0 A^{1/3}$
- schnell abfallend am Rand
- löse Einteilchen-Energieeigenwertproblem für einzelnes Nukleon
- fülle **Schalen** a la Fermi-Modell
- Modellpotentiale:

- Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } 0 \leq r \leq R, \\ \infty & \text{für } r > R. \end{cases}$$

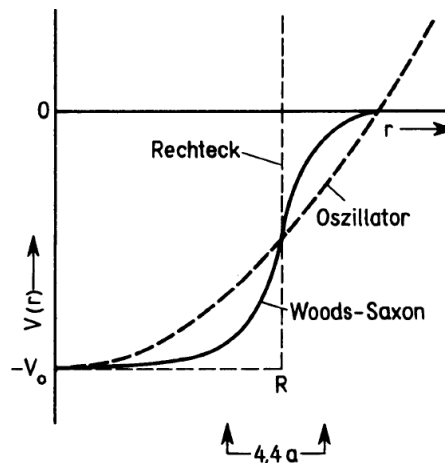
- 3D kugelsymmetrischer harmonischer Oszillator

$$V(r) = \frac{\mu\omega^2}{2} r^2$$

- fallen zwar nicht $\rightarrow 0$ ab für $\rightarrow \infty$, aber kein so großer Fehler für niedrigste Energiezustände
- dafür analytisch lösbar
- **Woods-Saxon-Potential** (ursprünglich für Nukleon-Kernstreuung ^[WS54])

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(R-r)/a]}$$

- nicht analytisch lösbar
- Potentiale für Schalenmodell



- Zentralpotentialproblem (Ortsdarstellung/Wellenmechanik)

$$\mathbf{H}\psi(\vec{x}) = \left[\frac{1}{2\mu} \vec{\mathbf{p}}^2 + V(r) \right] \psi(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \partial_r^2 [r\psi(\vec{x})] + \left[\frac{\vec{\mathbf{L}}^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi(\vec{x}),$$

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{p}} = -i\hbar \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\nabla}$$

- **Kugelsymmetrie: $[\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}] = 0$**

- **Energieeigenwertproblem:** Simultane Eigenfunktionen für \mathbf{H} , $\vec{\mathbf{L}}^2$, \mathbf{L}_z

$$\mathbf{H} u_{E\ell m} = E u_{E\ell m}, \quad \vec{\mathbf{L}}^2 u_{E\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) u_{E\ell m}, \quad \mathbf{L}_z u_{E\ell m} = m u_{E\ell m}.$$

- $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell\}$.

$$u_{E\ell m}(\vec{x}) \equiv u_{E\ell m}(r, \vartheta, \varphi) = R_{E\ell}(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} \psi_{E\ell}(r) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

- $Y_{\ell m}$: **Kugelflächenfunktionen**

- **Radialwellenfunktion**

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \psi_{E\ell}''(r) + \left[\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi_{E\ell}(r) = E \psi_{E\ell}(r).$$

- **H selbstadjungiert:** Randbedingung

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r R_{E\ell}(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \psi_{E\ell}(r) = 0.$$

- zu gegebenen E und $\ell \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow (2\ell+1)$ Zustände zu verschiedenem $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell\}$

- Energie-Entartung wegen **Drehsymmetrie**

- Energieeigenwerte hängen nicht von m ab

- **Kastenpotential**

- Lösungen $R_{E\ell}$ zusätzlich eingeschränkt durch Randbedingung $R_{E\ell}(R) = 0$

- wegen RB bei $r = 0$ eindeutige Lösung: **sphärische Besselfunktionen** $R_{E\ell}(r) = N j_\ell(k_E r)$, $k_E = \sqrt{2\mu E}/\hbar$ [Hee18, CH10]

- zu jedem ℓ : beliebig viele Energieeigenwerte \Leftrightarrow Nullstellen: $j_\ell(k_E R) = 0$

$$j_\ell(\rho) = (-\rho)^\ell \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^\ell \frac{\sin \rho}{\rho} \Rightarrow j_\ell(\rho) \underset{\rho \rightarrow 0}{\cong} \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell+1)!} \rho^\ell.$$

- analytische Funktion für $\rho \in \mathbb{R}$ (insbesondere bei $\rho = 0$)

- zu jedem ℓ gibt es unendlich viele diskrete Energieeigenwerte $E_{n,\ell}$, die durch die **Nullstellen der Besselfunktion** $\nu_{\ell,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) gemäß der RB

$$R_{n\ell}(r) = N_{n\ell} j_{\ell}(k_{n\ell} r) = 0, \quad k_{n\ell} R = \nu_{\ell,n} \Rightarrow E_{n\ell} = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \nu_{\ell,n}^2$$

bestimmt sind.

- **Harmonischer radialsymmetrischer Oszillator**
- Lösungen der Radialgleichung

$$R_{n_r,\ell}(r) = \sqrt{\frac{2n_r!}{(n_r + \ell + 1/2)!}} \frac{r^{\ell}}{b^{\ell+3/2}} L_{n_r}^{\ell+1/2}\left(\frac{r^2}{b^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{2b^2}\right)$$

- $b = \sqrt{\hbar/(\mu\omega)}$, L_n^k : assoziierte Laguerre-Polynome, $n_r \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$, $x! = \Gamma(x+1)$

- Energieeigenwerte

$$E_{n_r,\ell} = \hbar\omega \left(2n_r + \ell + \frac{3}{2}\right)$$

- $E_{n_r,\ell}$ hängt nur von **Hauptquantenzahl** $N = 2n_r + \ell$ ab; $N \in \mathbb{N}_0$
- **höherer Entartungsgrad** als nur von Rotationssymmetrie
- zusätzliche **dynamische Symmetrie** bei harmonischem sphärischem Oszi:
- **Symmetriegruppe SU(3)**
- **Entartungsgrade**

- $N = 2n_r + \ell = 0 \Rightarrow \ell = 0$: $g = 1$
- $N = 2n_r + \ell = 1 \Rightarrow \ell = 1$: $g = 3$
- $N = 2n_r + \ell = 2 \Rightarrow \ell \in \{0, 2\}$: $g = 6$
- $N = 2n_r + \ell = 3 \Rightarrow \ell \in \{1, 3\}$: $g = 10$
- $g_N = (N+1)(N+2)/2$

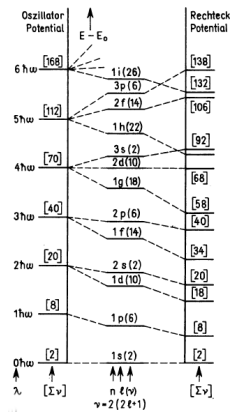
- **Pauli-Prinzip** \Rightarrow alle Level von unten nach oben gefüllt
- **Spin 1/2** \Rightarrow jeder Energiezustand kann mit 2 gleichartigen Nukleonen gefüllt werden

- **magische Zahlen:** oberstes Energielevel vollständig gefüllt

- bis $N = 0$ gefüllt: $2 \cdot 1 = 2$
- bis $N = 1$ gefüllt: $2 \cdot (1 + 3) = 8$
- bis $N = 2$ gefüllt: $2 \cdot (1 + 3 + 6) = 20$
- bis $N = 3$ gefüllt: $2 \cdot (1 + 3 + 6 + 10) = 40$
- $M_N = (N + 1)(N + 2)(N + 3)/3: 2, 8, 20, 40, 70, 112, \dots$

- Literatur: [Flu18, Fra71]

- **Energie-Level**



- NB: Oszillatorpotential hier $n = n_r + 1$

- empirische magische Zahlen: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

- Lösung: **Spin-Bahn-Kopplung**

- M. Goepfert Mayer [May50a, May50b]; O. Haxel, J. H. D. Jensen and H. E. Suess [HJS50]

- Physik-Nobelpreis an Goepfert Mayer und H. D. Jensen (1963)

$$\mathbf{H}_{\ell s} = V_{\ell s}(\mathbf{R}) \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} / \hbar^2$$

- **Gesamtdrehimpuls:** $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}, [\mathbf{L}_j, \mathbf{S}_k] = 0$
- Nukleon: $s = 1/2$
- **Addition von Drehimpulsen:** für gegebenes ℓ ergibt sich $j \in \{|\ell - 1/2|, \ell + 1/2\}$ (für $\ell = 0$ ist $j = +1/2$).
- **Energieeigenzustände:** VONS aus Eigenvektoren von $\mathbf{H}, \vec{\mathbf{J}}^2, \vec{\mathbf{L}}^2, \mathbf{L}_3$ und \mathbf{S}_3 (auch Eigenvektoren von \mathbf{J}_z mit $m_J = m_\ell + m_s$)
- Eigenwerte $E = E_{j\ell}, j(j+1)\hbar^2, \ell(\ell+1)\hbar^2, s(s+1)\hbar^2 = 3\hbar^2/4$

$$\vec{\mathbf{j}}^2 = (\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}})^2 = \vec{\mathbf{L}}^2 + \vec{\mathbf{S}}^2 + 2\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} \Rightarrow \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{j}}^2 - \vec{\mathbf{L}}^2 - \vec{\mathbf{S}}^2)$$

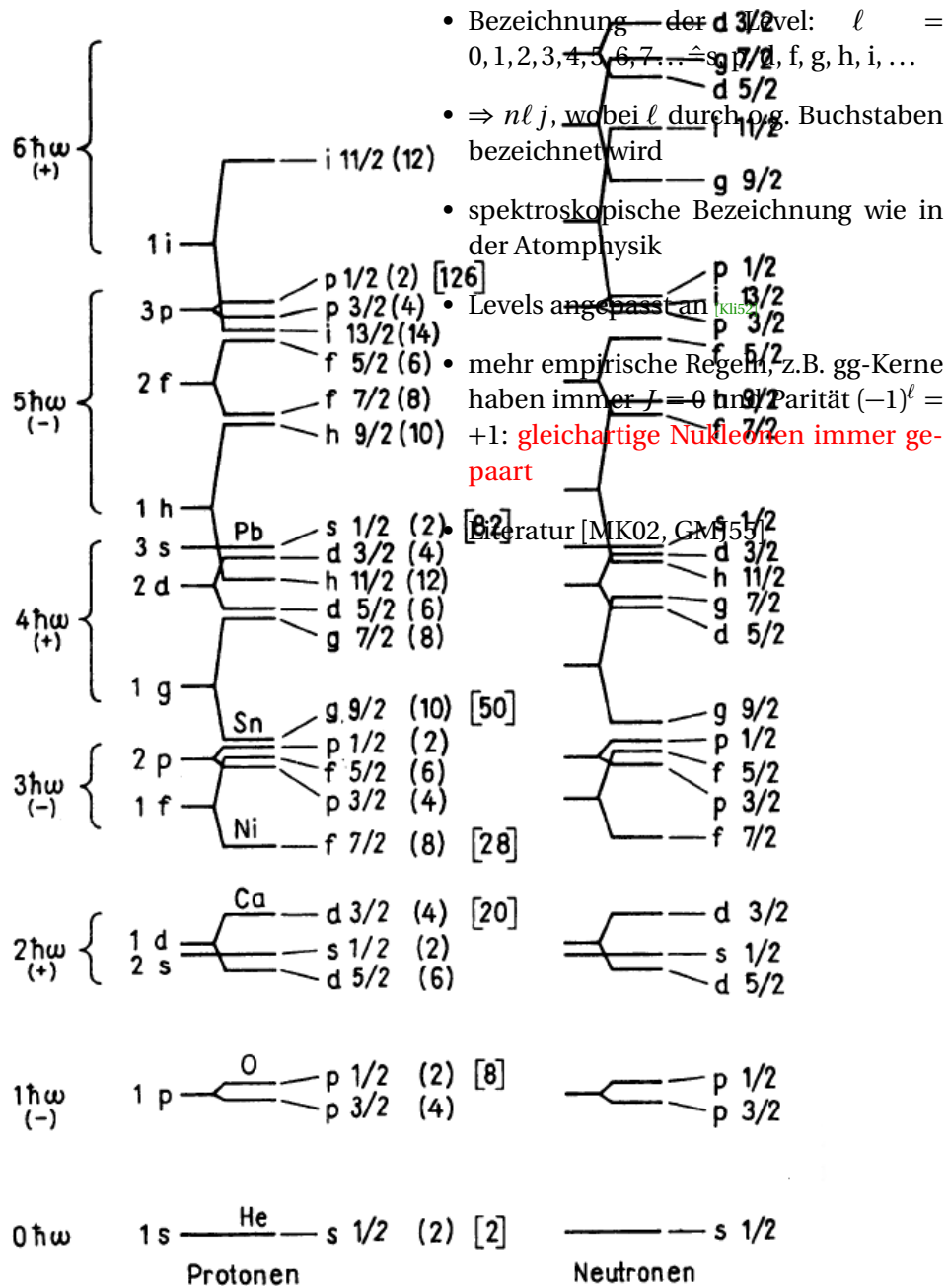
- Erwartungswert von $\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}}$ in Energieeigenzustand

$$\langle \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - 3/4] = \begin{cases} \hbar^2 \ell/2 & \text{für } j = \ell + 1/2, \\ -\hbar^2(\ell+1)/2 & \text{für } j = \ell - 1/2. \end{cases}$$

- Potential in Radialgleichung

$$V_{\text{tot}}(r) = \begin{cases} V(r) + \frac{1}{2} V_{\ell s}(r) \ell & \text{für } j = \ell + 1/2, \\ V(r) - \frac{1}{2} V_{\ell s}(r) (\ell + 1) & \text{für } j = \ell - 1/2. \end{cases}$$

- empirisch $V_{\ell s}(r) < 0 \Rightarrow E_{\ell-1/2, \ell} > E_{\ell+1/2, \ell}$
- Spin-Bahn-Kopplung führt zu Aufspaltung der Level für gegebenes $\ell, \Delta E_{j\pm 1/2} \propto 2\ell + 1$
- für geeignete Wahl von $V_{\ell s}$: gute Erklärung für **beobachtete „magische Zahlen“**



2 Bibliography

Bibliography

Literatur

- [CH10] W. Cassing and H. v. Hees, *Mathematische Methoden für Physiker*, Universität Gießen (2010), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/maphy.pdf>.
- [Fli18] T. Fließbach, *Quantenmechanik*, Springer Spektrum, Berlin, 6 edn. (2018), <https://doi.org/10.1007/978-3-662-58031-8>.
- [Fra71] W. Franz, *Quantentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1971), <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65289-9>.
- [GMJ55] M. Goeppert-Mayer and J. H. D. Jensen, *Elementary theory of nuclear shell structure*, John Wiley&Sons, New York, London (1955).
- [Hee18] H. van Hees, *Theoretische Physik 3 für das Lehramt L3*, Goethe-Universität Frankfurt (2018), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/theo3-13.pdf>.
- [HJS50] O. Haxel, J. H. D. Jensen and H. E. Suess, Modellmäßige Deutung der ausgezeichneten Nukleonenzahlen im Kernbau, *Zeitschrift für Physik* **128**, 295 (1950), <https://doi.org/10.1007/BF01333077>.
- [Kli52] P. F. A. Klinkenberg, Tables of Nuclear Shell Structure, *Rev. Mod. Phys.* **24**, 63 (1952), <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.24.63>.
- [Kra88] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley& Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore (1988).
- [May50a] M. G. Mayer, Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. I. empirical evidence, *Physical Review* **78**, 16 (1950), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.78.16>.
- [May50b] M. G. Mayer, Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. II. Theoretical considerations, *Physical Review* **78**, 22 (1950), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.78.22>.

- [MK02] T. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik - Eine Einführung*, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 7 edn. (2002),
<https://doi.org/10.1007/978-3-322-84876-5>.
- [RS80] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1980).
- [WS54] R. D. Woods and D. S. Saxon, Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering, *Phys. Rev.* **95**, 577 (1954),
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.95.577>.