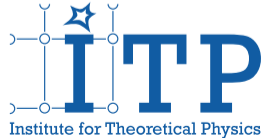


Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 3: Kollektive Kernmodelle (Kernanregungen)

Hendrik van Hees

Goethe University Frankfurt



Outline

Tröpfchenmodell

Kollektive Kernmodelle (Kernanregungen)

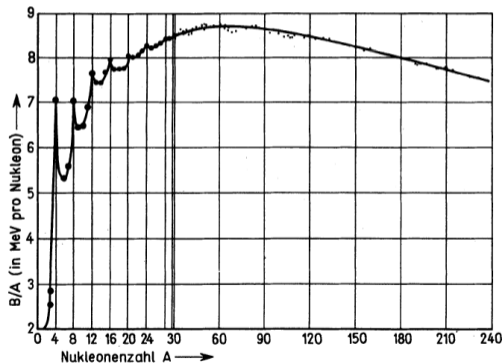
Bibliography

Tröpfchenmodell

Literatur: [MK02, Kra88]

Idee des Tröpfchenmodells

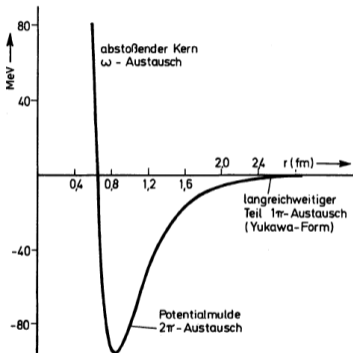
- ▶ Vorige Vorlesung: Fermi-Modell \Rightarrow nicht zu kleine Kerne \simeq **Flüssigkeitströpfchen**
- ▶ kurzreichweitige Bindungskräfte mit Repulsion bei noch kleineren Abständen
- ▶ Flüssigkeit \simeq **inkompressibel** $\Rightarrow A/V \simeq \text{const} \Rightarrow R = r_0 A^{1/3}$
- ▶ Ziel: wie kann man damit **Bindungsenergien** (grob) verstehen?



- ▶ Bindungsenergie: $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$

Die Beiträge zur Bindungsenergie

- ▶ Nukleon-Nukleon-Potenital (schematisch; nur Radialanteil)



- ▶ denke Kern durch Nukleon für Nukleon aus $r \rightarrow \infty$ zu Tröpfchen
zusammengefügt: $B_1 = a_V A$ Kondensationsenergie, „Volumenenergie“

Die Beiträge zur Bindungsenergie

- ▶ Nukleonen an Oberfläche weniger gebunden
- ▶ \Rightarrow negativer Beitrag zur Bindungsenergie \propto **Oberfläche**
- ▶ $S_{\text{Kern}} = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$
- ▶ $B_2 = -a_S A^{2/3}$: **Oberflächenenergie**

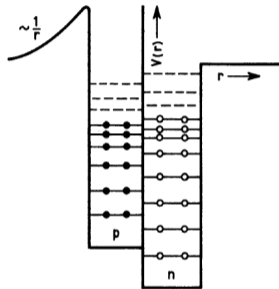
- ▶ Z positiv geladene Protonen \Rightarrow **repulsive Coulomb-Wechselwirkung**; $q = Ze$
- ▶ Coulomb-Energie für homogen geladene Kugel (vgl. Übungsblatt 2!):
 $E_{\text{Coul}} = 3q^2 / (20\pi\epsilon_0 R) \propto Z^2 / R \propto Z^2 A^{-1/3}$
- ▶ liefert **negativen Beitrag** zur Bindungsenergie: $B_3 = -a_C Z^2 A^{-1/3}$
(**Coulomb-Energie**)

Die Beiträge zur Bindungsenergie

- ▶ Nukleonen an Oberfläche weniger gebunden
- ▶ \Rightarrow negativer Beitrag zur Bindungsenergie \propto **Oberfläche**
- ▶ $S_{\text{Kern}} = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$
- ▶ $B_2 = -a_S A^{2/3}$: **Oberflächenenergie**

Die Beiträge zur Bindungsenergie

- ▶ Fermi-Gas-Modell (s. vorige Vorlesung): **Neutronenüberschuss**



- ▶ i.a. $Z \neq N \Rightarrow$ Abweichung von $Z = N = A/2$
 \Rightarrow negativer Beitrag zur Bindungsenergie
- ▶ \Rightarrow **Asymmetrieenergie**: $B_4 = -a_{as}(Z - A/2)^2/A$

Die Beiträge zur Bindungsenergie

- ▶ im Rahmen des Tröpfchenmodells empirische Korrektur: **Paarungsenergie**
- ▶ **Separationsenergie**: Energie, um ein Nukleon aus Kern zu lösen
- ▶ empirisch \Rightarrow **pp- und nn-Paarungen energetisch bevorzugt**
 - ▶ **höhere Bindungsenergie** für A und Z gerade (**gg-Kerne**) gegenüber **ug- oder gu-Kernen**
 - ▶ **niedrigere Bindungsenergie** für A und Z ungerade (**uu-Kerne**) gegenüber **ug- oder gu-Kernen**

$$B_5 = \begin{cases} +\delta & \text{für gg-Kerne,} \\ 0 & \text{für ug- oder gu-Kerne,} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne.} \end{cases}$$

- ▶ **empirische Formel**: $\delta \simeq a_p A^{-1/2}$

Bethe-Weizsäcker-Massenformel

- ▶ Zusammenfassung aller Beiträge zur **Atommasse** [BB36, Wei35]

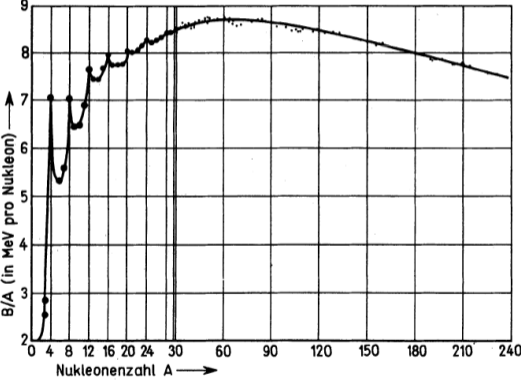
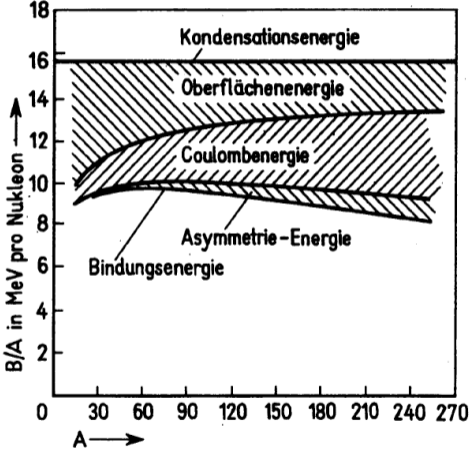
$$m_{\text{Atom}}(Z, A) = Z m_{\text{H}} + (A - Z) m_{\text{n}} - B/c^2,$$

$$B/c^2 = a_{\text{V}}A - a_{\text{S}}A^{2/3} - a_{\text{C}}Z^2A^{-1/3} - a_{\text{as}}(Z - A/2)^2A^{-1} \pm a_{\text{p}}A^{-1/2}$$

- ▶ Fit der Konstanten (Wapstra 1958) aus [Flü58]

$$a_{\text{V}} = 15,85 \text{ MeV}/c^2, \quad a_{\text{S}} = 18,34 \text{ MeV}/c^2, \quad a_{\text{C}} = 0,71 \text{ MeV}/c^2, \quad a_{\text{as}} = 92,86 \text{ MeV}/c^2, \\ a_{\text{p}} = 11,46 \text{ MeV}/c^2$$

Bethe-Weizsäcker-Massenformel

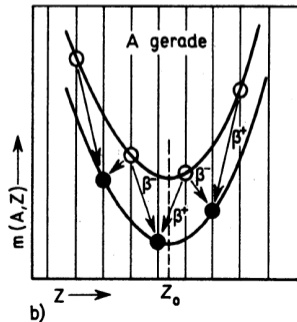
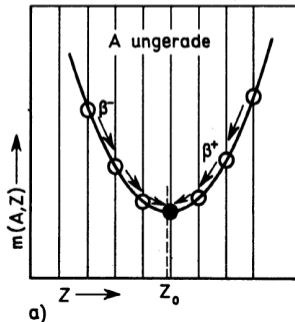


Ausblick: Kernstabilität

- ▶ **Isobare:** Kerne/**Nuklide** mit gleicher **Massenzahl A**
- ▶ Z_0 : stabilster Kern $\partial_Z m(Z_0, A) = 0$

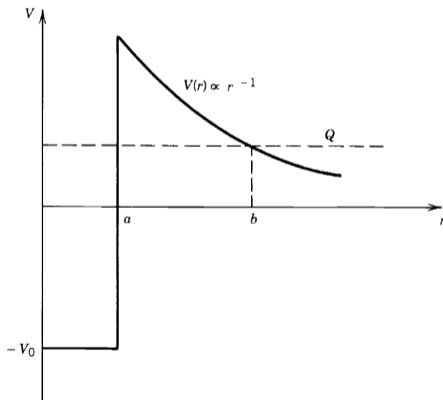
$$Z_0 = \frac{A}{2} \left(\frac{m_n - m_H + a_A}{a_C A^{2/3} + a_A} \right)$$

- ▶ β -Stabilität (Zerfälle aufgrund der **schwachen Wechselwirkung**)
 - ▶ $Z < Z_0$: **β^- -Zerfall** eines Neutrons: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \Rightarrow A = \text{const}, Z \rightarrow Z + 1$
 - ▶ $Z > Z_0$: **ϵ, β^+ -Prozesse:** $p + e^- \rightarrow n + \nu_e, \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$



Ausblick: Kernstabilität

- ▶ α -Zerfall: ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} X'_{N-2} + {}^4_2\text{He}_2$
- ▶ ${}^4_2\text{He}_2$ -Kern= α -Teilchen: besonders stark gebunden: $B/A = 7,07 \text{ MeV}$
- ▶ α -Cluster innerhalb von Kernen
- ▶ z.B. ${}^{12}_6\text{C}_6$ gut beschrieben als Bindungszustand von 3 α -Teilchen



- ▶ α tunnelt durch Potentialbarriere (Gamow 1928) [Gam28]

Ausblick: Kernstabilität

▶ weitere Prozesse:

▶ **Spontanspaltung**

▶ **γ -Zerfall:** ${}^Z_A X_N \rightarrow {}^Z_A X_N^*$ (keine Kernumwandlung **elektromagnetischer Übergang**)

▶ **Cluster-Emission:** Abspaltung eines größeren Kerns

▶ analog wie α -Zerfall aber extrem selten

▶ Beispiel: ${}^{223}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{208}_{82}\text{Pb} + {}^{14}_6\text{C}$

The Karlsruhe Nuclide Chart

A nuclide chart is a two dimensional representation of the nuclear and radioactive properties of all known atoms. A nuclide is the generic name for atoms characterized by the constituent protons and neutrons. The nuclide chart arranges nuclides according to the number of protons (vertical axis) and neutrons (horizontal axis) in the nucleus. Each nuclide in the chart is represented by a box containing the element symbol and mass number, half-life, decay types and decay energies, etc.

“Magic” numbers

In nuclear physics, a magic number is a number of protons or neutrons (e.g. 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126) which give rise to a complete shell in the atomic nucleus. Lead 208 for example, which consists of 82 protons and 126 neutrons, is called “doubly magic” since both the proton and neutron numbers are “magic”.

Number of protons (Z)



Number of neutrons (N)

N=28

Z=20 Calcium

Lead Z=82

N=126

Examples of the nuclide box structure

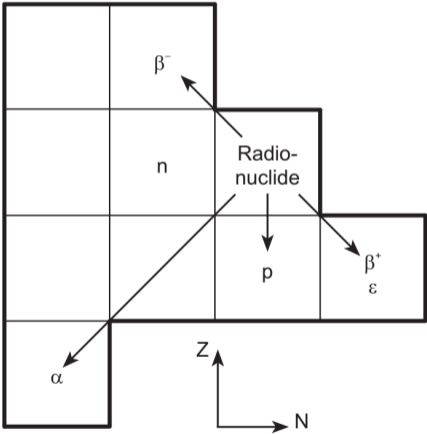
Th 232 100 1.40 · 10 ¹⁰ a α 4.012, 3.947... γ (64...), e ⁻ , sf σ 7.37, α 3E-6	Ac 226 29.37 h β ⁻ 0.9, 1.1 e ⁻ , α 5.40 γ 230, 158, 254 188...
Ra 225 14.9 d β ⁻ 0.3, 0.4 γ 40, e ⁻	Bi 207 31.55 a e, β ⁺ ... γ 570, 1064 1770...
Cs 135 53 m 2.3 · 10 ⁶ a IT 846 γ 787 β ⁻ 0.3 no γ g σ 8.3	Rn 219 3.96 s α 6.819, 6.553 6.425... γ 271, 402...

Black squares represent stable atoms. Other colours indicate the modes of radioactive decay, e.g. by emission of alpha particles (α), beta particles (β), neutrons (n), etc.

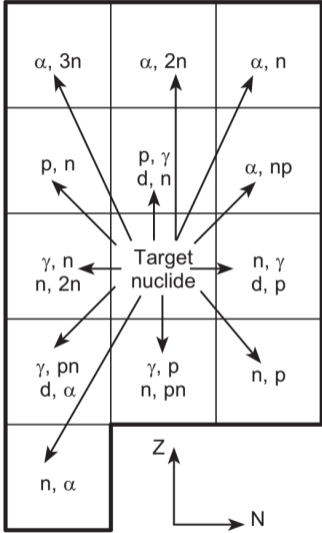
stable	p	α	ϵ β^+	IT	β^-	sf	CE	n
--------	---	----------	-------------------------	----	-----------	----	----	---

[SMD19]

Zerfallssystematik in Nuklidkarte



(a)



(b)

[SMD19]

Kollektive Kernmodelle (Kernanregungen)

Literatur: [\[MK02, Kra88\]](#)

Kernanregungen

- ▶ bisher: **nur Grundzustände**
- ▶ Annahme: kugelförmiger Tropfen aus **inkompressibler Flüssigkeit**
- ▶ gute Beschreibung für **Inneres des Kerns**
- ▶ gefüllte „Schalen“ → nächste Vorlesung zum **Schalenmodell**
- ▶ **übrige Kerne bzw./ Anregungen**
- ▶ **Deformationsmoden** des Tröpfchens
 - ▶ **Schwingungen/Vibrationen**
 - ▶ **Rotationen**
 - ▶ **zeitabhängige** Form der Oberfläche
 - ▶ „**sphärische Polardarstellung**“

$$R(t, \vartheta, \varphi) = R_0 + \delta R_{\text{vib}}(t, \vartheta, \varphi) + \delta R_{\text{rot}}(t, \vartheta, \varphi)$$

- ▶ beschrieben mit **Kugelflächenfunktionen** $Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$

Kugelflächenfunktionen

- ▶ gemeinsame Eigenvektoren von \vec{L}^2 und L_3
- ▶ In Kugelkoordinaten nur von Ableitungen nach **Winkeln** abhängig

$$\vec{L}\psi = \frac{1}{\hbar} \vec{L} = \frac{1}{\hbar} \vec{x} \times \vec{p}\psi = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}\psi = -i\left(-\vec{e}_\vartheta \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\psi,$$

$$\vec{L}^2 = -\left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right],$$

$$L_3\psi = \vec{e}_3 \cdot \vec{L}\psi = -i\partial_\varphi\psi.$$

- ▶ Hilbertraum: $L^2(\Omega)$: $\psi(\vec{n}) \equiv \psi(\vartheta, \varphi)$
- ▶ Skalarprodukt

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_\Omega = \int_\Omega d^2f \psi_1^*(\vec{n})\psi_2(\vec{n}) = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta \psi_1^*(\vartheta, \varphi)\psi_2(\vartheta, \varphi).$$

Kugelflächenfunktionen (Definition)

- ▶ **Literatur:** [ST93, Fic79, Hee18, Hee15]
- ▶ **Gemeinsame Eigenfunktionen** von $\tilde{\mathbf{I}}^2$ und \mathbf{I}_z :

$$\tilde{\mathbf{I}}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell + 1)Y_{\ell m}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

$$\mathbf{I}_z Y_{\ell m} = mY_{\ell m}, \quad m \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell\}.$$

- ▶ **Lösungen**

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell m}(\cos \vartheta) \exp(im\varphi)$$

- ▶ **Condon-Shortley-Phase** (bequeme Konvention in der QM)
- ▶ **zugeordnete Legendre-Funktionen**

$$P_{\ell m}(\xi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1 - \xi^2)^{m/2} \partial_\xi^{\ell+m} (\xi^2 - 1)^\ell$$

- ▶ **Spezialfall $m = 0$: Legendre-Polynome**

$$P_\ell(\xi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \partial_\xi^\ell (\xi^2 - 1)^\ell \Rightarrow P_{\ell m}(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \partial_\xi^m P_\ell(\xi)$$

Kugelflächenfunktionen (Eigenschaften)

- ▶ Orthonormalität

$$\langle Y_{\ell_1 m_1} | Y_{\ell_2 m_2} \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} d^2 f Y_{\ell_1 m_1}^*(\vec{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\vec{n}) = \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2}.$$

- ▶ Parität $\vec{n} \rightarrow -\vec{n} \Leftrightarrow (\vartheta, \varphi) \rightarrow (\pi - \vartheta, \pi + \varphi)$

$$Y_{\ell m}(-\vec{n}) = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(\vec{n})$$

- ▶ Komplex Konjugiertes

$$Y_{\ell m}^*(\vec{n}) = (-1)^m Y_{\ell, -m}(\vec{n})$$

- ▶ **Vollständiger Satz orthonormaler Funktionen (VONS)**

$$\psi(\vec{n}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \psi_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) \Leftrightarrow \psi_{\ell m} = \langle Y_{\ell m} | \psi \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} d^2 f Y_{\ell m}^*(\vec{n}) \psi(\vec{n})$$

Kugelflächenfunktionen (bis $\ell = 2$)

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{11}(\vartheta, \varphi) = -Y_{1,-1}^*(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta \exp(i\varphi),$$

$$Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta,$$

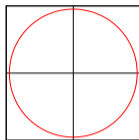
$$Y_{22}(\vartheta, \varphi) = Y_{2,-2}^*(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta \exp(2i\varphi),$$

$$Y_{21}(\vartheta, \varphi) = -Y_{2,-1}^*(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta \exp(i\varphi),$$

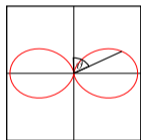
$$Y_{20}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$$

Kugelflächenfunktionen (Polardiagramme)

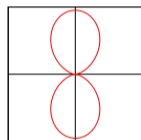
- ▶ $|Y_{\ell m}(\vec{n})|^2$ hängen nur von ϑ ab, da $Y_{\ell m} \propto P_{\ell m}(\vartheta) \exp(im\varphi)$



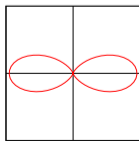
$\ell = 0$



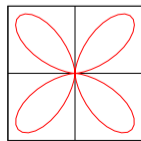
$\ell = 1, m = 1$



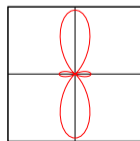
$\ell = 1, m = 0$



$\ell = 2, m = 2$



$\ell = 2, m = 1$



$\ell = 2, m = 0$

Kugelflächenfunktionen (Anwendungen)

- ▶ (negativer) **Laplace-Operator**

$$\frac{1}{\hbar^2} \vec{\mathbf{p}}^2 \psi = -\Delta \psi = -\frac{1}{r} \partial_r^2 (r \psi) + \frac{1}{r^2} \vec{\mathbf{I}}^2 \psi$$

- ▶ Quantenmechanik: Schrödingergleichung mit **Radialpotential** $V(\vec{\mathbf{x}}) = V(r)$, $r = |\vec{\mathbf{x}}|$
 - ▶ **Rotationssymmetrie**: $[\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}] = 0 \Rightarrow \psi(\vec{\mathbf{x}}) = R_{E,\ell}(r) Y_{\ell m}(\vec{\mathbf{n}})$
 - ▶ Eigenwertproblem auf 1D Radialgleichung zurückgeführt
 - ▶ Streuung an Zentralpotentialen: **Partialwellenentwicklung**

Kugelflächenfunktionen (Anwendungen)

- ▶ (negativer) **Laplace-Operator**

$$\frac{1}{\hbar^2} \vec{\mathbf{p}}^2 \psi = -\Delta \psi = -\frac{1}{r} \partial_r^2 (r \psi) + \frac{1}{r^2} \vec{\mathbf{I}}^2 \psi$$

- ▶ Wegen obiger Relation zum Laplace-Operator unzählige Anwendungen in **klassischer Feldtheorie** (Aero-, Hydro-, Fluidodynamik, Elektrodynamik)
 - ▶ bekanntes Beispiel: **Multipolentwicklung in der Elektrodynamik**

$$-\Delta \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \Rightarrow \Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q_{\ell m}}{(2\ell + 1)r^{\ell+1}} Y(\vartheta, \varphi)$$

- ▶ **sphärische Multipolmomente** der Ladungsverteilung ρ

$$q_{\ell m} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') \rho(\vec{r}').$$

- ▶ **„ 2^ℓ -Polmomente“**: Monopol $\ell = 0$, Dipol $\ell = 1$, Quadrupol $\ell = 2$, Oktupol $\ell = 3$, ...

Reguläre Kugelfunktionen I

- ▶ **Reguläre Kugelfunktionen** (engl. regular solid harmonics)

$$R_{\ell m}(\vec{x}) = r^\ell Y_{\ell m}(\vec{n}), \quad r = |\vec{x}|, \quad \vec{n} = \vec{x}/r$$

- ▶ **harmonische Funktionen:** $\Delta R_{\ell m} = 0$:

$$\Delta R_{\ell m} = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r R_{\ell m}) - \frac{1}{r^2} \vec{1}^2 R_{\ell m} = (\ell + 1)\ell r^{\ell-2} Y_{\ell m} - \ell(\ell + 1) r^{\ell-2} Y_{\ell m} = 0.$$

- ▶ offenbar sind $R_{\ell m}(\vec{x})$ homogene Polynome vom Grad ℓ
- ▶ alle harmonischen Polynome vom Grad ℓ lassen sich als Superpositionen schreiben:

$$P_\ell(\vec{x}) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell m} R_{\ell m}(\vec{x})$$

- ▶ P_ℓ bilden $(2\ell + 1)$ -dimensionalen Untervektorraum der homogenen Polynome von \vec{x} vom Grad ℓ , da $m \in \{-\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell\}$

Reguläre Kugelfunktionen II

- ▶ P_ℓ in kartesischen Koordinaten von $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ (Einstein-Summenkonvention!)

$$P_\ell(\vec{x}) = a_{k_1 k_2 \dots k_\ell} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_\ell}$$

- ▶ **Tensoren** ℓ -ter Stufe!
- ▶ voneinander unabhängig: $a_{k_1 \dots k_\ell}$ symmetrisch unter Vertauschung beliebiger Indizes
- ▶ harmonisch: $\Delta P_\ell = 0$ liefert weitere Bedingungen für $a_{k_1 \dots k_\ell}$
- ▶ $\ell = 0$: $P_0 = a_0 = \text{const} \Rightarrow a_0$ beliebig
- ▶ $\ell = 1$: $P_1 = a_{k_1} x_{k_1} \Rightarrow a_{k_1}$ beliebig
- ▶ $\ell \geq 2$: für jedes Indexpaar (k_a, k_b) für die beiden Ableitungen denselben Beitrag; $\binom{\ell}{2} = \ell(\ell - 1)/2$ verschiedene Paare, über die kontrahiert wird:

$$\Delta P_\ell(\vec{x}) = \frac{\ell(\ell - 1)}{2} a_{j j k_3 \dots k_\ell} \stackrel{!}{=} 0$$

Reguläre Kugelfunktionen III

- ▶ $a_{k_1 \dots k_\ell}$: alle vollständig symmetrischen spurlose Tensoren
- ▶ **irreduzible symmetrische Tensoren**
- ▶ Kombinatorik: es gibt

$$\binom{\ell+3-1}{\ell} = \binom{\ell+2}{\ell} = \frac{(\ell+2)!}{\ell!2!} = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}$$

Parameter für total symmetrische Zahlenschemata $a_{k_1 \dots k_\ell}$

- ▶ für $\ell \geq 2$: aus den ℓ Indizes kann man

$$\binom{\ell}{2} = \frac{\ell!}{2!(\ell-2)!} = \frac{\ell(\ell-1)}{2}$$

Paare auswählen, die man kontrahieren kann

Reguläre Kugelfunktionen IV

- ▶ harmonische Polynome:

$$\frac{1}{2}[(\ell + 1)(\ell + 2) - \ell(\ell - 1)] = 2\ell + 1$$

unabhängige Parameter \Rightarrow korrekte Dimension der harmonischen homogenen Polynome vom Grad ℓ

- ▶ **Fazit:** reguläre Kugelfunktionen zu gegebenen ℓ spannen alle **total symmetrischen Tensoren ℓ -ter Stufe**, deren Kontraktion über beliebige Indexpaare verschwindet
- ▶ total symmetrische **irreduzible** Tensoren
- ▶ hängen eng mit **Multipolmomenten** zusammen
- ▶ NB: irreguläre Kugelfunktionen (irregular solid harmonics)

$$I_{\ell m}(r, \vec{n}) = \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}$$

Anwendung auf kollektive Kernmodelle

- ▶ beschreibe Kernoberfläche durch Polardarstellung $R = R(t, \vartheta, \varphi)$
- ▶ **Multipolentwicklung**

$$R(t, \vartheta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell m}(t) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \right]$$

- ▶ Eigenschaften der **Multipolmomente**

$$\alpha_{\ell m}(t) = \int_{\Omega} d^2 f Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) R(t, \vartheta, \varphi)$$

- ▶ $R \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\alpha_{\ell m}^* = \int_{\Omega} d^2 f Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) R(t, \vartheta, \varphi) = \int_{\Omega} d^2 f (-1)^m Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) R(t, \vartheta, \varphi) = (-1)^m \alpha_{\ell, -m}$$

Anwendung auf kollektive Kernmodelle

► Eigenschaften der **Multipolmomente**

- Radius ist **Skalar** unter Rotationen $R(\vec{n}) = R'(\vec{n}') = R'(\hat{D} \vec{n})$
- Rotationen **unitäre Transformation** generiert von $\vec{\mathbf{I}}$

$$\mathbf{R} = \exp(-i\phi \vec{\mathbf{I}} \cdot \vec{n}_{\text{rot}})$$

- ϕ : Drehwinkel; \vec{n}_{rot} : Richtung der Rotationsachse („**Rechte-Hand-Regel**“)
- Rotationen ändern ℓ nicht \Rightarrow

$$Y_{\ell m}(\vec{n}') = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(\phi, \vec{n}_{\text{rot}}) Y_{\ell m'}(\vec{n})$$

- NB: Üblicherweise werden Drehungen mit Euler-Winkeln α, β, γ parametrisiert:
 $\mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)}(\alpha, \beta, \gamma)$ Wigner-Drehmatrizen
- Verhalten der Multipolmomente unter Drehungen

$$\alpha'_{\ell m} = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} \mathcal{D}_{mm'}^{(\ell)*} \alpha_{\ell m'}$$

- Parität: $\alpha_{\ell m} \rightarrow (-1)^{\ell} \alpha_{\ell m}$

Geometrische Bedeutung der Multipoldeformationen

- ▶ **Monopol ($\ell = 0$)**

$$R = R_0 \left(1 + \frac{\alpha_{00}}{\sqrt{4\pi}} \right)$$



[Abb. von Renan Hirayama]

- ▶ ändert Volumen: **Kompressibilität des Kerns**
- ▶ für Kerne vernachlässigbar $\alpha_{00} \simeq 0$
- ▶ wichtig bei hohen Dichten: **Zustandsgleichung der Kernmaterie**
- ▶ Mittlerer Radius: Wegen Orthonormalität der $Y_{\ell m}$:

$$\langle R \rangle = R_0 + \frac{R_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^2 f \sum_{\ell m} \alpha_{\ell m} Y_{\ell m}(\vec{n}) = R_0 \left(1 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{4\pi}} \right)$$

- ▶ Multipolmomente mit $\ell \geq 1$ ändern mittleren Radius (und bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_{\ell m}^2)$ auch **Volumen**) nicht (\rightarrow Übungen, Blatt 03)

Geometrische Bedeutung der Multipoldeformationen

▶ Dipol ($\ell = 1$)



[Abb. von Renan Hirayama]

- ▶ $\vec{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi)$
- ▶ $\Delta R^{(1)} = R_0 a_k n_k$ **Translation in des Kerns als Ganzes in Richtung von \vec{a}**
- ▶ NB: Zweifluidmodell (je ein Fluid für Protonen und Neutronen)
 - ▶ Dipolanregungen können Schwingungen der Protonen gegen die Neutronen beschreiben
 - ▶ **Dipolriesenresonanz** (M. Goldhaber, E. Teller, 1948) [GT48]
 - ▶ beobachtet in Reaktionen $\gamma + A \rightarrow A' + n$

Geometrische Bedeutung der Multipoldeformationen

▶ Quadrupol ($l = 2$)



[Abb. von Renan Hirayama]

- ▶ $\vec{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi)$
- ▶ $\Delta R^{(2)} = R_0 a_{kl} n_k n_l$
- ▶ a_{kl} symmetrisch und spurfrei (5 unabhängige reelle Komponenten)
- ▶ Hauptachsen-Transformation
 - ▶ im momentanen Hauptachsensystem: Deformation zu Ellipsoiden (**Vibrationen**)
 - ▶ Hauptachsensystem relativ zu Laborsystem **gedreht** \Rightarrow **Rotation des Kerns als ganzes**

Konvergenz der Multipolentwicklung

- ▶ Extrema der $Y_{\ell m}$: 2 für $m = 0$; $2|m|(\ell - m + 1)$ für $m > 0$
- ▶ maximal für $m = \ell/2$: $\sim \ell(\ell + 4)/2$
- ▶ im Extremfall können höchstens alle Nukleonen an Oberfläche solch einen Berg auf Oberfläche bewirken: Anzahl $\propto A^{2/3}$
- ▶ $\ell = 4$: 16 Berge \Rightarrow erst ab $A \geq 16^{3/2} = 64$ relevant
- ▶ $\ell = 5$: $A \geq 107$
- ▶ $\ell = 6$: $A \geq 165$

Bibliography I

- [BB36] H. A. Bethe and R. F. Bacher, Nuclear Physics A. Stationary States of Nuclei, Rev. Mod. Phys. **8**, 82 (1936), <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.8.82>.
- [Fic79] E. Fick, *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*, Aula-Verlag, Wiesbaden, 4 edn. (1979).
- [Flü58] S. Flügge (ed.), *Handbuch der Physik*, vol. 38/1, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1958), <https://doi.org/10.1007/978-3-642-45901-6>.
- [Gam28] G. Gamow, Zur Quantentheorie des Atomkernes, Z. Phys. **51**, 204 (1928), <https://doi.org/10.1007/BF01343196>.
- [GT48] M. Goldhaber and E. Teller, On nuclear dipole vibrations, Phys. Rev. **74**, 1046 (1948), <https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.1046>.

Bibliography II

- [Hee15] H. v. Hees, Grundlagen der Quantentheorie, I. Teil: Nichtrelativistische Quantentheorie, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2015), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/faq-pdf/quant.pdf>.
- [Hee18] H. van Hees, *Theoretische Physik 3 für das Lehramt L3*, Goethe-Universität Frankfurt (2018), <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/publ/theo3-13.pdf>.
- [Kra88] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley& Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore (1988).
- [MK02] T. Mayer-Kuckuck, *Kernphysik - Eine Einführung*, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 7 edn. (2002), <https://doi.org/10.1007/978-3-322-84876-5>.

Bibliography III

- [SMD19] Z. Solti, J. Magill and R. Dreher, Karlsruhe nuclide chart–new 10th edition 2018, EPJ Nuclear Sciences & Technologies **5**, 6 (2019), <https://doi.org/10.1051/epjn/2019004>.
- [ST93] J. J. Sakurai and S. Tuan, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley (1993).
- [Wei35] C. F. V. Weizsäcker, Zur Theorie der Kernmassen, Z. Phys. **96**, 431 (1935), <https://doi.org/10.1007/BF01337700>.