

# Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

## Vorlesung 2: Das Fermi-Gas-Modell

Hendrik van Hees

### **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Quantenmechanik-Review</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teilchen im Kasten</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Fermi-Gas-Modell für Kerne</b>	<b>8</b>
<b>1</b>	<b>Quantenmechanik-Review</b>	

## Quantenmechanik-Review

Literatur: [\[ST93, Fic79\]](#)

## Nichtrelativistische Quantenmechanik (Kinematik)

- (Reine) Zustände: Zustandsvektoren  $|\psi\rangle$  in **Hilbertraum**  $\mathcal{H}$
- $\mathcal{H}$ : komplexer Vektorraum mit **Skalarprodukt**  $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$
- Observablen: **Selbstadjungierte** lineare Operatoren  $\mathbf{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , d.h.  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$ ; i.a.  $\langle\psi_1|\mathbf{A}\psi_2\rangle = \langle\mathbf{A}^\dagger\psi_1|\psi_2\rangle$
- Mögliche **Messwerte**: Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ ; reell; Eigenvektoren orthonormiert

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = \begin{cases} \delta_{a_1, a_2} & \text{für diskrete Eigenwerte,} \\ \delta(a_1 - a_2) & \text{für kontinuierliche Eigenwerte} \end{cases}$$

- zwei Observablen gleichzeitig scharf determinierbar, wenn  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A} = 0$
- dann existieren **gemeinsame vollständige Eigensysteme von Eigenvektoren**
- $(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$ : vollständiger Satz kompatibler Observabler  $\Leftrightarrow |a_1, \dots, a_n\rangle$  **bis auf Phasenfaktor eindeutig bestimmt**
- Phasenfaktoren irrelevant

## Nichtrelativistische Quantenmechanik (Kinematik)

- **Bornsche Regel**: falls System in Zustand  $|\psi\rangle$  mit  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$  präpariert, dann ist

$$P(a_1, \dots, a_n) = |\langle a_1, \dots, a_n | \psi \rangle|^2$$

Wahrscheinlichkeit (diskrete Eigenwerte) bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte (kontinuierliche Eigenwerte), die Werte  $(a_1, \dots, a_n)$  zu erhalten

- Vollständigkeit der  $|a_1, \dots, a_n\rangle \Rightarrow$  „**vollständiges Orthonormalsystem (VONS)**“

$$\int d^n a |a_1, \dots, a_n\rangle \langle a_1, \dots, a_n| = \mathbb{1}$$

- selbstadjungierte Operatoren: **diskrete und kontinuierliche Eigenwerte**
- **Vollständigkeitsrelation**: Summe (Integral) über diskrete (kontinuierliche) Eigenwerte
- im kontinuierlichen Spektrum „auf  $\delta$ -Distributionen normiert“

## Nichtrelativistische Quantenmechanik (Dynamik)

- **Hamilton-Operator:  $\mathbf{H}$**  (repräsentiert Gesamtenergie des Systems)
- **Zeitentwicklung des Zustandes (Schrödinger-Bild)**

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \mathbf{H}|\psi(t)\rangle$$

- Observablen-Operatoren **zeitunabhängig** (allenfalls „explizite Zeitabhängigkeit“)
- Falls  $\mathbf{H}$  nicht explizit zeitabhängig

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-i\mathbf{H}t/\hbar)|\psi_0\rangle = \mathbf{U}(t)|\psi_0\rangle$$

- $\mathbf{U}$  unitär:  $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$
- falls  $|\psi_0\rangle = |E\rangle$  **Energieeigenzustand** zum Eigenwert  $E$

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iEt/\hbar)|\psi_0\rangle$$

- Phasenfaktor irrelevant  $\Rightarrow$  **Wahrscheinlichkeiten zeitunabhängig**

$$\begin{aligned} P(t, a_1, \dots, a_n) &= |\langle a_1, \dots, a_n | \psi(t) \rangle|^2 = |\langle a_1, \dots, a_n | \exp(-iEt/\hbar)\psi_0 \rangle|^2 \\ &= |\exp(-iEt/\hbar)|^2 |\langle a_1, \dots, a_n | \psi_0 \rangle|^2 = P_0(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

## Wellenmechanik

- **Quantisierung** eines klassischen Teilchens: Observablen Funktionen aus  $\vec{x}$  und  $\vec{p}$
- $[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = 0$ ,  $[\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0$ ,  $[\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$  (**Heisenberg-Algebra**)
- Relation zum Noether-Theorem:  $\vec{p}$  erzeugt **Translationen**  $\Leftrightarrow$  Impuls in abgeschlossenen Systemen **erhalten**
- Ortsdarstellung:  $|x_1, x_2, x_3\rangle = |\vec{x}\rangle$  VONS von gemeinsamen Eigenvektoren von  $\mathbf{x}_k$
- kontinuierliche Eigenwerte:  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
- Vollständigkeit

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{1}$$

## Wellenmechanik

- **Quantisierung** eines klassischen Teilchens: Observablen Funktionen von  $\vec{x}$  und  $\vec{p}$
- $[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = 0$ ,  $[\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0$ ,  $[\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar \delta_{jk}$  (**Heisenberg-Algebra**)
- NB: **Poisson-Klammern** der klassischen Hamiltonschen Mechanik für Phasenraumfunktionen  $f(\vec{x}, \vec{p})$

$$\{f, g\}_{\text{pb}} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j}$$

- $\{x_j, x_k\}_{\text{pb}} = 0$ ,  $\{p_j, p_k\}_{\text{pb}} = 0$ ,  $\{x_j, p_k\}_{\text{pb}} = \delta_{jk}$
- Heuristisches Verfahren: **kanonische Quantisierung**:  $\{A, B\}_{\text{pb}} \mapsto \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$
- Relation zum **Noether-Theorem**:  $\vec{p}$  erzeugt **Translationen**  $\Leftrightarrow$  Impuls in abgeschlossenen Systemen **erhalten**
- $|x_1, x_2, x_3\rangle = |\vec{x}\rangle$  VONS von gemeinsamen **Eigenvektoren von  $\mathbf{x}_k$**
- **kontinuierliche Eigenwerte**:  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
- Vollständigkeit

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{1}$$

## Wellenmechanik

- Schrödinger: Wellenfunktion **Ortsdarstellung** der Zustandskets

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle \Leftrightarrow |\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x} | \psi \rangle$$

- $dP = d^3x |\psi(x)|^2$  ist **Wahrscheinlichkeit**, das Teilchen in einem Volumenelement  $d^3x$  um die Stelle  $\vec{x}$  zu detektieren
- Wellenfunktionen bilden Hilbertraum der **quadratintegrablen Funktionen  $L^2(\mathbb{R}^3)$**
- Skalarprodukt

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \langle \psi_1 | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_1^*(\vec{x}) \psi_2(\vec{x})$$

- Orts- und Impulsoperatoren:

$$\hat{\mathbf{x}}\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \hat{\mathbf{x}}\psi \rangle = \langle \vec{x}\vec{x} | \psi \rangle = \vec{x} \langle \vec{x} | \psi \rangle = \vec{x}\psi(\vec{x}), \quad \hat{\mathbf{p}}\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \hat{\mathbf{p}}\psi \rangle = -i\hbar \vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

## 2 Teilchen im Kasten

# Teilchen im Kasten

### Teilchen im Kasten

- erst 1D-Bewegung in „Kastenpotential“

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < a/2, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Hamilton-Operator:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x})$$

- Energie-Eigenzustände

$$\mathbf{H} u_n(x) = E_n u_n(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} u_n''(x) = E_n u_n(x) \Rightarrow u_n''(x) = -k_n^2 u_n(x), \quad k_n = \sqrt{2mE_n}/\hbar$$

- Randbedingungen:  $u(a/2) = u(-a/2) = 0$ , damit konsistent mit  $u(x) = 0$  für  $x > |a|$

- Lösungen der DGL

$$u_n(x) = A \sin(k_n x) + B \cos(k_n x) \quad \text{mit} \quad k_n = \sqrt{2mE_n}/\hbar$$

### Teilchen im Kasten

- Symmetrie unter **Raumspiegelungen**  $x \rightarrow -x \Rightarrow$  Eigenfunktionen können als symmetrisch/antisymmetrisch gewählt werden
- **P**  $u_n(x) = u_n(-x) = \pm u_n(x)$ : „**Parität**“
- gerade Eigenfunktionen:

$$u_n^{(+)}(x) = A \cos(k_n x)$$

- $u_n^{(+)}(a) = u_n^{(+)}(-a) = 0 \Rightarrow k_n^{(+)} a \in \{\pi/2, 3\pi/2, \dots\}$ , also

$$k_n^{(+)} = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \{1, 3, 5, \dots\}$$

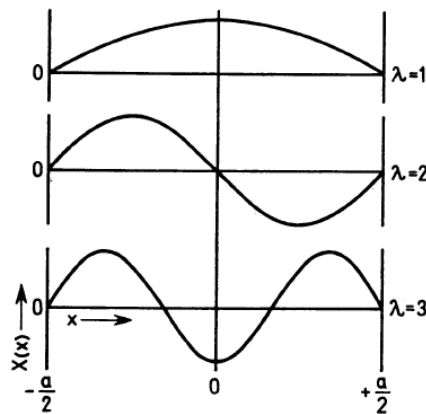
- Normierung:  $\langle u_n | u_n \rangle = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2/a}$
- analog: ungerade Eigenfunktionen

$$u_n^{(-)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n^{(-)} x), \quad k_n^{(-)} = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- im Folgenden:  $u_n^{\pm} = u_n$  (Parität  $P = (-1)^{n+1}$ )

### Teilchen im Kasten

- Energie-Eigenfunktionen
- NB: Wellenfunktion mit Quantenzahl  $n \in \mathbb{N}$  hat  $(n - 1)$  Nullstellen (+ die beiden am Rand bei  $x = \pm a/2$ )



### Teilchen im 3D Kasten

- Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(\vec{x}), \quad V(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{x} \in [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2], \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- Eigenfunktionen

$$u_{n_1, n_2, n_3}(\vec{x}) = u_{n_1}(x_1) u_{n_2}(x_2) u_{n_3}(x_3)$$

- Energieeigenwerte

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^3 k_{n_j}^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} \sum_{j=1}^3 n_j^2$$

### Teilchen im 3D Kasten: Zustandsdichte

- „Impuls“:  $\vec{p}_{n_1, n_2, n_3} = \hbar \vec{k}_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar}{a} (n_1, n_2, n_3)$
- NB:  $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$  NICHT selbstadjungiert (nur hermitesch)! s. [Hee15], S. 93ff
- in **Impulsvolumen**  $d^3 p$  sind

$$dn = \frac{a^3}{(\pi\hbar)^3} d^3 p, \quad p_j > 0$$

Zustände

- $\vec{p}$  in Kugeloktant mit  $p_j > 0$  erlaubt. Nimmt man volle Kugel für  $\vec{p}$ , ergibt sich ein zusätzlicher Faktor  $1/8 = 1/2^3$ :

$$dn = \frac{a^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p, \quad \vec{p} \in \mathbb{R}^3.$$

- **Phasenraumvolumenelement** der Größe  $(2\pi\hbar)^3 = h^3 \hat{=}$  genau **1 Zustand**
- wegen  $E = p^2/(2m)$  bzw.  $p = \sqrt{2mE}$  ergibt sich **Zustandsdichte bzgl. der Energie**

$$d^3 p|_E = 4\pi p^2 dp = 4\pi \sqrt{2m^3 E} dE \Rightarrow dn = m^{3/2} \frac{V \sqrt{E}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} dE$$

### 3 Fermi-Gas-Modell für Kerne

# Fermi-Gas-Modell für Kerne

Literatur (+Quelle aller Abbildungen) [MK02]

#### Ideales Fermi-Gas bei $T = 0$ im Potentialtopf

- Gas aus  $N$  **nicht wechselwirkenden Fermionen mit Spin  $S(= 1/2)$**  im Topf bei Temperatur  $T = 0$
- vollständiger Satz von Observablen für 1 Teilchen:  $\vec{p}$  (Impuls) und  $\mathbf{s}_z$
- VONS:  $|\vec{p}, m_s\rangle$  mit  $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ ,  $s_z = m_s \hbar$  mit  $m_s \in \{1/2, -1/2\}$
- Fermionen: „**Pauli-Verbot**“ in jedem Phasenraumvolumenelement können sich maximal  $2S + 1 (= 2)$  identische Fermionen aufhalten
- $T = 0$ : Gas im **Grundzustand**  $\Rightarrow N$  Fermionen füllen von unten die Einzelteilchenenergiezustände auf  $\Rightarrow E_F$  Fermienergie

$$N = (2S + 1) \int_0^{E_F} dE \frac{dn}{dE} = (2S + 1) \sqrt{2} m^{3/2} \frac{V E_F^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

- **Fermi-Energie**

$$E_F = \frac{1}{[2(2S + 1)^2]^{1/3} m} (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$



### Fermi-Gas-MModell für Kerne

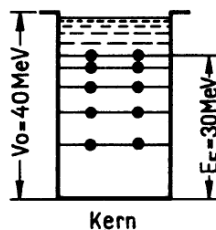
- Kern besteht aus  $A$  Nukleonen:  $Z$  Protonen und  $N = A - Z$  Neutronen
- empirisch (z.B. Elektronstreuung an Kernen): Nukleonendichte  $\sim \text{const}$  innerhalb des Kerns **unabhängig von  $A$**   $\Rightarrow V \propto A$
- Kugelförmiger Kern mit Kernradius  $R = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 \simeq 1,25 \text{ fm}$ ,  $V = 4\pi R^3/3 = 4\pi r_0^3 A/3$
- eigentlich kompliziertes Vielteilchenproblem wechselwirkender p und n
- Drastische Vereinfachung: einzelnes Nukleon spürt konstantes Potential, verursacht von allen anderen Nukleonen (endlich hoher Potentialtopf)
- **Nukleon-Potential gleich für p und n** (abgesehen von em. Coulombwechselwirkung für p)

### Fermi-Gas-MModell für Kerne

- Kern aus  $A$  Nukleonen
- **Stabilität gegen  $\beta$ -Zerfall**:  $E_{\text{Fp}} \simeq E_{\text{Fn}} = E_{\text{F}} \Rightarrow N \simeq Z = A/2$

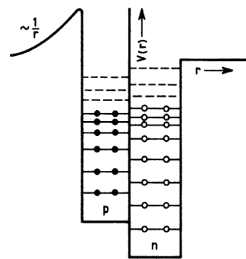
$$E_{\text{F}} = \frac{1}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \left( \frac{A}{2V} \right)^{2/3} = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} (\hbar c)^2}{m c^2 r_0^2} \simeq 30 \text{ MeV}$$

- $\hbar c \simeq 0,197 \text{ GeV fm}$ ,  $m c^2 = 0,938 \text{ GeV}$ ,  $r_0 \simeq 1,25 \text{ fm}$
- Separationsenergie  $\simeq 8 \text{ MeV} \Rightarrow V_0 \simeq 40 \text{ MeV}$



### Fermi-Gas-MModell für Kerne

- bis jetzt: **nur starke Wechselwirkung** berücksichtigt
- starke Wechselwirkung: „ladungsunabhängig“  $\Rightarrow$  NN-Wechselwirkung für pp, np, nn gleich  $\Rightarrow$  Potentialtöpfe im Fermi-Modell für p und n gleich
- aber Protonen **elektrisch geladen**  $\Rightarrow$  abstoßendes **Coulomb-Potential**  $\Rightarrow$  Protonen weniger stark gebunden als Neutronen



- üblicherweise  $N \gtrsim Z$  (für  $\beta$ -stabile Kerne)

### Fermi-Gas-MModell für Kerne

- **totale Energie** eines kalten Fermi-Gases mit  $N$  Teilchen

$$E_{\text{tot}} = (2S+1) \int_0^{E_F} dE E \frac{dn}{dE} = (2S+1) \int_0^{E_F} m^{3/2} \frac{V \sqrt{E}^3}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} V (2S+1)}{5\pi^2 \hbar^3} E_F^{5/2}$$

$$= \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5 \cdot 2^{1/3} m (2S+1)^{2/3}} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}$$

- definiere (a la Mayer-Kuckuck, Kernphysik) mit  $V = 4\pi A r_0^3 / 3$

$$C_3 = \frac{9 \cdot 3^{1/3} \pi^{2/3} \hbar^2}{10m[2(2S+1)]^{2/3} r_0^2} \Rightarrow E_{\text{tot}} = C_3 A^{-2/3} N^{5/3}$$

### Fermi-Gas-Modell für Kerne

- Energie für Modell mit  $N \neq Z$  (wobei hier  $N = A - Z$ !)

$$E_T = C_3 A^{-2/3} (N^{5/3} + Z^{5/3})$$

- für symmetrisches Modell:  $N = Z = A/2$

$$E_T^{(\text{symm})} = 2C_3 A^{-2/3} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}.$$

- **Asymmetrie-Energie:** mit  $T_Z = (Z - N)/2$  (Hälfte des negativen Neutronenüberschusses)
- NB:  $T_Z = [(Z - (A - Z))/2] = Z - A/2$

$$\Delta E = E_T - E_T^{(\text{symm})} = C_3 A^{-2/3} \left[ \left(\frac{A}{2} - T_Z\right)^{5/3} + \left(\frac{A}{2} + T_Z\right)^{5/3} - 2\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \right]$$

- Entwicklung nach kleinen  $T_Z/A$  (Binomialformel)

$$\Delta E = C_3 A \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{T_Z}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{T_Z}{A}\right)^{5/3} - 2^{2/3} \right] = \frac{10}{9} 2^{1/3} C_3 \frac{T_Z^2}{A}$$

## Bibliography

## Literatur

- [Fic79] E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Aula-Verlag, Wiesbaden, 4 ed. (1979).
- [Hee15] H. v. Hees, Grundlagen der Quantentheorie, I. Teil: Nichtrelativistische Quantentheorie, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2015).  
URL <https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/faq-pdf/quant.pdf>
- [MK02] T. Mayer-Kuckuck, Kernphysik - Eine Einführung, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 7 ed. (2002).  
URL <https://doi.org/10.1007/978-3-322-84876-5>
- [ST93] J. J. Sakurai, S. Tuan, Modern Quantum Mechanics, Addison Wesley (1993).