

Einführung in die theoretische Kern- und Teilchenphysik

Vorlesung 2: Das Fermi-Gas-Modell

Hendrik van Hees

Inhaltsverzeichnis

1	Quantenmechanik-Review	1
2	Teilchen im Kasten	5
3	Fermi-Gas-Modell für Kerne	8

1 Quantenmechanik-Review

Quantenmechanik-Review

Literatur: [ST93, Fie79]

Nichtrelativistische Quantenmechanik (Kinematik)

- (Reine) Zustände: Zustandsvektoren $|\psi\rangle$ in Hilbertraum \mathcal{H}
- \mathcal{H} : komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$
- Observablen: Selbstadjungierte lineare Operatoren $\mathbf{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, d.h. $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$; i.a. $\langle\psi_1|\mathbf{A}\psi_2\rangle = \langle\mathbf{A}^\dagger\psi_1|\psi_2\rangle$
- Mögliche Messwerte: Eigenwerte von \mathbf{A} ; reell; Eigenvektoren orthonormalisiert

$$\langle a_1 | a_2 \rangle = \begin{cases} \delta_{a_1, a_2} & \text{für diskrete Eigenwerte,} \\ \delta(a_1 - a_2) & \text{für kontinuierliche Eigenwerte} \end{cases}$$

- zwei Observablen gleichzeitig scharf determinierbar, wenn $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = 0$
- dann existieren gemeinsame vollständige Eigensysteme von Eigenvektoren
- $(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$: vollständiger Satz kompatibler Observabler $\Leftrightarrow |a_1, \dots, a_n\rangle$ bis auf Phasenfaktor eindeutig bestimmt
- Phasenfaktoren irrelevant

Nichtrelativistische Quantenmechanik (Kinematik)

- Bornsche Regel: falls System in Zustand $|\psi\rangle$ mit $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ präpariert, dann ist

$$P(a_1, \dots, a_n) = |\langle a_1, \dots, a_n | \psi \rangle|^2$$

Wahrscheinlichkeit (diskrete Eigenwerte) bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte (kontinuierliche Eigenwerte), die Werte (a_1, \dots, a_n) zu erhalten

- Vollständigkeit der $|a_1, \dots, a_n\rangle \Rightarrow$ „vollständiges Orthonormalsystem (VONS)“

$$\sum d^n a |a_1, \dots, a_n\rangle \langle a_1, \dots, a_n| = \mathbb{1}$$

- selbstadjungierte Operatoren: diskrete und kontinuierliche Eigenwerte
- Vollständigkeitsrelation: Summe (Integral) über diskrete (kontinuierliche) Eigenwerte
- im kontinuierlichen Spektrum „auf δ -Distributionen normiert“

Nichtrelativistische Quantenmechanik (Dynamik)

- **Hamilton-Operator:** \mathbf{H} (repräsentiert Gesamtenergie des Systems)
- **Zeitentwicklung des Zustandes (Schrödinger-Bild)**

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \mathbf{H} |\psi(t)\rangle$$

- Observablen-Operatoren **zeitunabhängig** (allenfalls „explizite Zeitabhängigkeit“)
- Falls \mathbf{H} nicht explizit zeitabhängig

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-i\mathbf{H}t/\hbar) |\psi_0\rangle = \mathbf{U}(t) |\psi_0\rangle$$

- \mathbf{U} unitär: $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$
- falls $|\psi_0\rangle = |E\rangle$ **Energieeigenzustand** zum Eigenwert E

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iEt/\hbar) |\psi_0\rangle$$

- Phasenfaktor irrelevant \Rightarrow **Wahrscheinlichkeiten zeitunabhängig**

$$\begin{aligned} P(t, a_1, \dots, a_n) &= |\langle a_1, \dots, a_n | \psi(t) \rangle|^2 = |\langle a_1, \dots, a_n | \exp(-iEt/\hbar) \psi_0 \rangle|^2 \\ &= |\exp(-iEt/\hbar)|^2 |\langle a_1, \dots, a_n | \psi_0 \rangle|^2 = P_0(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Wellenmechanik

- **Quantisierung** eines klassischen Teilchens: Observablen Funktionen aus \vec{x} und \vec{p}
- $[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = 0, \quad [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0, \quad [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar \delta_{jk}$ (**Heisenberg-Algebra**)
- Relation zum Noether-Theorem: \vec{p} erzeugt **Translationen** \Leftrightarrow Impuls in abgeschlossenen Systemen **erhalten**
- Ortsdarstellung: $|x_1, x_2, x_3\rangle = |\vec{x}\rangle$ VONS von gemeinsamen Eigenvektoren von \mathbf{x}_k
- kontinuierliche Eigenwerte: $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
- Vollständigkeit

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{1}$$

Wellenmechanik

- Quantisierung eines klassischen Teilchens: Observablen Funktionen von \vec{x} und \vec{p}
- $[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k] = 0, [\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k] = 0, [\mathbf{x}_j, \mathbf{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ (Heisenberg-Algebra)
- NB: Poisson-Klammern der klassischen Hamiltonschen Mechanik für Phasenraumfunktionen $f(\vec{x}, \vec{p})$

$$\{f, g\}_{\text{pb}} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j}$$

- $\{x_j, x_k\}_{\text{pb}} = 0, \{p_j, p_k\}_{\text{pb}} = 0, \{x_j, p_k\}_{\text{pb}} = \delta_{jk}$
- Heuristisches Verfahren: kanonische Quantisierung: $\{A, B\}_{\text{pb}} \mapsto \frac{1}{i\hbar} [A, B]$
- Relation zum Noether-Theorem: \vec{p} erzeugt Translationen \Leftrightarrow Impuls in abgeschlossenen Systemen erhalten
- $|x_1, x_2, x_3\rangle = |\vec{x}\rangle$ VONS von gemeinsamen Eigenvektoren von \mathbf{x}_k
- kontinuierliche Eigenwerte: $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
- Vollständigkeit

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{1}$$

Wellenmechanik

- Schrödinger: Wellenfunktion Ortsdarstellung der Zustandsketten

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle \Leftrightarrow |\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x |\vec{x}\rangle \langle \vec{x} | \psi \rangle$$

- $dP = d^3x |\psi(x)|^2$ ist Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einem Volumenelement d^3x um die Stelle \vec{x} zu detektieren
- Wellenfunktionen bilden Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $L^2(\mathbb{R}^3)$
- Skalarprodukt

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \langle \psi_1 | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_1^*(\vec{x}) \psi_2(\vec{x})$$

- Orts- und Impulsoperatoren:

$$\vec{x}\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{x}\psi \rangle = \langle \vec{x}\vec{x} | \psi \rangle = \vec{x} \langle \vec{x} | \psi \rangle = \vec{x}\psi(\vec{x}), \quad \vec{p}\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{p}\psi \rangle = -i\hbar \vec{\nabla} \psi(\vec{x})$$

2 Teilchen im Kasten

Teilchen im Kasten

Teilchen im Kasten

- erst 1D-Bewegung in „Kastenpotential“

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < a/2, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Hamilton-Operator:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x})$$

- Energie-Eigenzustände

$$\mathbf{H} u_n(x) = E_n u_n(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} u_n''(x) = E_n u_n(x) \Rightarrow u_n''(x) = -k_n^2 u_n(x), \quad k_n = \sqrt{2mE_n}/\hbar$$

- Randbedingungen: $u(a/2) = u(-a/2) = 0$, damit konsistent mit $u(x) = 0$ für $x > |a|$

- Lösungen der DGL

$$u_n(x) = A \sin(k_n x) + B \cos(k_n x) \quad \text{mit} \quad k_n = \sqrt{2mE_n}/\hbar$$

Teilchen im Kasten

- Symmetrie unter Raumspiegelungen $x \rightarrow -x \Rightarrow$ Eigenfunktionen können als symmetrisch/antisymmetrisch gewählt werden
- $P u_n(x) = u_n(-x) = \pm u_n(x)$: „Parität“
- gerade Eigenfunktionen:

$$u_n^{(+)}(x) = A \cos(k_n x)$$

- $u_n^{(+)}(a) = u_n^{(+)}(-a) = 0 \Rightarrow k_n^{(+)} a \in \{\pi/2, 3\pi/2, \dots\}$, also

$$k_n^{(+)} = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \{1, 3, 5, \dots\}$$

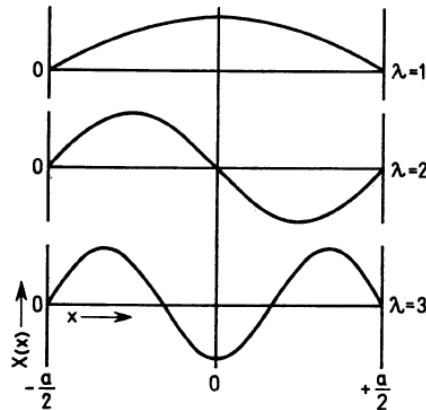
- Normierung: $\langle u_n | u_n \rangle = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2/a}$
- analog: ungerade Eigenfunktionen

$$u_n^{(-)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(k_n^{(-)} x), \quad k_n^{(-)} = k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \{2, 4, 6, \dots\}.$$

- im Folgenden: $u_n^{\pm} = u_n$ (Parität $P = (-1)^{n+1}$)

Teilchen im Kasten

- Energie-Eigenfunktionen
- NB: Wellenfunktion mit Quantenzahl $n \in \mathbb{N}$ hat $(n-1)$ Nullstellen (+ die beiden am Rand bei $x = \pm a/2$)



Teilchen im 3D Kasten

- Hamiltonoperator

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \vec{\mathbf{p}}^2 + V(\vec{x}), \quad V(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{x} \in [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2], \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- Eigenfunktionen

$$u_{n_1, n_2, n_3}(\vec{x}) = u_{n_1}(x_1)u_{n_2}(x_2)u_{n_3}(x_3)$$

- Energieeigenwerte

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^3 k_{n_j}^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2} \sum_{j=1}^3 n_j^2$$

Teilchen im 3D Kasten: Zustandsdichte

- „Impuls“: $\vec{p}_{n_1, n_2, n_3} = \hbar \vec{k}_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar}{a}(n_1, n_2, n_3)$
- NB: $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ NICHT selbstadjungiert (nur hermitesch)! s. [Hee15], S. 93ff
- in **Impulsvolumen** $d^3 p$ sind

$$dn = \frac{a^3}{(\pi \hbar)^3} d^3 p, \quad p_j > 0$$

Zustände

- \vec{p} in Kugeloktant mit $p_j > 0$ erlaubt. Nimmt man volle Kugel für \vec{p} , ergibt sich ein zusätzlicher Faktor $1/8 = 1/2^3$:

$$dn = \frac{a^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3 p, \quad \vec{p} \in \mathbb{R}^3.$$

- **Phasenraumvolumenelement** der Größe $(2\pi\hbar)^3 = h^3$ $\hat{=}$ genau 1 Zustand
- wegen $E = p^2/(2m)$ bzw. $p = \sqrt{2mE}$ ergibt sich **Zustandsdichte bzgl. der Energie**

$$d^3 p|_E = 4\pi p^2 dp = 4\pi \sqrt{2m^3 E} dE \Rightarrow dn = m^{3/2} \frac{V \sqrt{E}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} dE$$

3 Fermi-Gas-Modell für Kerne

Fermi-Gas-Modell für Kerne

Literatur (+Quelle aller Abbildungen) [MK02]

Ideales Fermi-Gas bei $T = 0$ im Potentialtopf

- Gas aus N nicht wechselwirkenden Fermionen mit Spin $S(= 1/2)$ im Topf bei Temperatur $T = 0$
- vollständiger Satz von Observablen für 1 Teilchen: \vec{p} (Impuls) und \mathbf{s}_z
- VONS: $|\vec{p}, m_s\rangle$ mit $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, $s_z = m_s \hbar$ mit $m_s \in \{1/2, -1/2\}$
- Fermionen: „Pauli-Verbot“ in jedem Phasenraumvolumenelement können sich maximal $2S + 1 (= 2)$ identische Fermionen aufhalten
- $T = 0$: Gas im **Grundzustand** $\Rightarrow N$ Fermionen füllen von unten die Einzelchenenergiezustände auf $\Rightarrow E_F$ Fermienergie

$$N = (2S + 1) \int_0^{E_F} dE \frac{dn}{dE} = (2S + 1) \sqrt{2} m^{3/2} \frac{V E_F^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

- **Fermi-Energie**

$$E_F = \frac{1}{[2(2S + 1)^2]^{1/3} m} (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

Fermi-Gas-Modell für Kerne

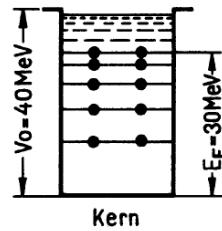
- Kern besteht aus A Nukleonen: Z Protonen und $N = A - Z$ Neutronen
- empirisch (z.B. Elektronstreuung an Kernen): Nukleonendichte $\sim \text{const}$ innerhalb des Kerns **unabhängig von A** $\Rightarrow V \propto A$
- Kugelförmiger Kern mit Kernradius $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 \approx 1,25 \text{ fm}$, $V = 4\pi R^3 / 3 = 4\pi r_0^3 A / 3$
- eigentlich kompliziertes Vielteilchenproblem wechselwirkender p und n
- Drastische Vereinfachung: einzelnes Nukleon spürt konstantes Potential, verursacht von allen anderen Nukleonen (endlich hoher Potentialtopf)
- **Nukleon-Potential gleich für p und n** (abgesehen von em. Coulombwechselwirkung für p)

Fermi-Gas-Modell für Kerne

- Kern aus A Nukleonen
- **Stabilität gegen β -Zerfall:** $E_{Fp} \approx E_{Fn} = E_F \Rightarrow N \approx Z = A/2$

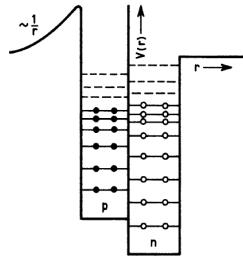
$$E_F = \frac{1}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \left(\frac{A}{2V} \right)^{2/3} = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} (\hbar c)^2}{mc^2 r_0^2} \approx 30 \text{ MeV}$$

- $\hbar c \approx 0,197 \text{ GeV fm}$, $mc^2 = 0,938 \text{ GeV}$, $r_0 \approx 1,25 \text{ fm}$
- Separationsenergie $\approx 8 \text{ MeV} \Rightarrow V_0 \approx 40 \text{ MeV}$



Fermi-Gas-Modell für Kerne

- bis jetzt: nur starke Wechselwirkung berücksichtigt
- starke Wechselwirkung: „ladungsunabhängig“ \Rightarrow NN-Wechselwirkung für pp, np, nn gleich \Rightarrow Potentialtöpfe im Fermi-Modell für p und n gleich
- aber Protonen elektrisch geladen \Rightarrow abstoßendes Coulomb-Potential \Rightarrow Protonen weniger stark gebunden als Neutronen



- üblicherweise $N \gtrsim Z$ (für β -stabile Kerne)

Fermi-Gas-Modell für Kerne

- totale Energie eines kalten Fermi-Gases mit N Teilchen

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= (2S+1) \int_0^{E_F} dE E \frac{dn}{dE} = (2S+1) \int_0^{E_F} m^{3/2} \frac{V \sqrt{E}^3}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} = \frac{\sqrt{2} m^{3/2} V (2S+1)}{5\pi^2 \hbar^3} E_F^{5/2} \\ &= \frac{3(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5 \cdot 2^{1/3} m (2S+1)^{2/3}} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} \end{aligned}$$

- definiere (a la Mayer-Kuckuck, Kernphysik) mit $V = 4\pi A r_0^3 / 3$

$$C_3 = \frac{9 \cdot 3^{1/3} \pi^{2/3} \hbar^2}{10 m [2(2S+1)]^{2/3} r_0^2} \Rightarrow E_{\text{tot}} = C_3 A^{-2/3} N^{5/3}$$

Fermi-Gas-Modell für Kerne

- Energie für Modell mit $N \neq Z$ (wobei hier $N = A - Z$!)

$$E_T = C_3 A^{-2/3} (N^{5/3} + Z^{5/3})$$

- für symmetrisches Modell: $N = Z = A/2$

$$E_{\text{T}}^{(\text{symm})} = 2C_3 A^{-2/3} \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3}.$$

- **Asymmetrie-Energie:** mit $T_Z = (Z - N)/2$ (Hälften des negativen Neutronenüberschusses)
- NB: $T_Z = [(Z - (A - Z))/2] = Z - A/2$

$$\Delta E = E_{\text{T}} - E_{\text{T}}^{(\text{symm})} = C_3 A^{-2/3} \left[\left(\frac{A}{2} - T_Z \right)^{5/3} + \left(\frac{A}{2} + T_Z \right)^{5/3} - 2 \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right]$$

- Entwicklung nach kleinen T_Z/A (Binomialformel)

$$\Delta E = C_3 A \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{T_Z}{A} \right)^{5/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{T_Z}{A} \right)^{5/3} - 2^{-2/3} \right] = \frac{10}{9} 2^{1/3} C_3 \frac{T_Z^2}{A}$$

Bibliography

Literatur

- [Fic79] E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Aula-Verlag, Wiesbaden, 4 ed. (1979).
- [Hee15] H. v. Hees, Grundlagen der Quantentheorie, I. Teil: Nichtrelativistische Quantentheorie, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2015).
URL
<https://itp.uni-frankfurt.de/~hees/faq-pdf/quant.pdf>
- [MK02] T. Mayer-Kuckuck, Kernphysik - Eine Einführung, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 7 ed. (2002).
URL <https://doi.org/10.1007/978-3-322-84876-5>
- [ST93] J. J. Sakurai, S. Tuan, Modern Quantum Mechanics, Addison Wesley (1993).