Herleitung der Kepler-Gl.

Verwende Drehimpulserhaltung für $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow t = \int_0^{\varphi} d\varphi' \frac{dt}{d\varphi'} = \frac{\mu}{L}\int_0^{\varphi} d\varphi' r^2(\varphi') \qquad (1)$$

$$\mu = \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} \underset{m_s \to \infty}{\simeq} m_p$$

Um Gl. für Zeitabhängigkeit der Bahn zu erhalten, ist es sinnvoll, statt φ die exzentrische Anomalie u zu verwenden.

Aus Abb. im Skript auf S. 67:

$$r^2 = (x-e)^2 + y^2 = (a\cos u - e) + b^2 \sin^2 u$$

$$= a^2\cos^2 u + e^2 + b^2\sin^2 u - 2ae\cos u$$

$$= a^2\cos^2 u + e^2 + a^2\sin^2 u - \underbrace{(a^2-b^2)}_{e^2}\sin^2 u - 2ae\cos u$$

$$= a^2 + e^2\cos^2 u - 2ae\cos u$$

$$= (a - e\cos u)^2 \qquad \text{Da } a > e$$

$$\Rightarrow \boxed{r = a - e\cos u = a(1 - \varepsilon\cos u)} \qquad (2)$$

Andererseits ist

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \quad \text{mit} \quad p = \frac{b^2}{a}$$

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a} = a(1-\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi} = a(1-\varepsilon\cos u)}$$

oder

$$\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\varphi} = 1-\varepsilon\cos u$$

$$\Rightarrow \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{1-\varepsilon^2} = \frac{1}{1-\varepsilon\cos u}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\cos\varphi = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos u} - 1$$

$$= \frac{\cancel{1}-\varepsilon^2-(\cancel{1}-\varepsilon\cos u)}{1-\varepsilon\cos u}$$

$$= \frac{\varepsilon\cos u - \varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{\cos u - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos u}}$$

Integral für t $\Rightarrow$ Umrechnung auf Integral bzgl. u ③

$$t \overset{(1)}{=} \frac{\Gamma}{L} \int_0^{\varphi} d\varphi' \, r^2(\varphi')$$

$$= \frac{\Gamma}{L} \int_0^{u} du' \, \frac{d\varphi'}{du'} \, r^2[\varphi'(u')] \qquad (3)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u} \right)$$

$$\frac{d\varphi}{du} = - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u}\right)^2}} \cdot \left[\frac{-\sin u (1 - \cancel{\varepsilon \cos u}) - \varepsilon \sin u \cdot (\cancel{\cos u} - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon \cos u)^2} \right]$$

$$= - \frac{1}{1 - \varepsilon \cos u} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \varepsilon \cos u)^2 - (\cos u - \varepsilon)^2}}$$

$$(\varepsilon^2 - 1) \sin u$$

$$= \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin u}{1 - \varepsilon \cos u} \; \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 \cos^2 u - 2 \varepsilon \cos u - \cos^2 u + 2 \varepsilon \cos u - \varepsilon^2)}}$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1-\varepsilon^2 \sin u}{1-\varepsilon \cos u} \cdot \frac{1}{\sqrt{}}$$

Ausdruck unter Wurzel

$$1+\varepsilon^2\cos^2 u - \cancel{2\varepsilon\cos u} - \cos^2 u + \cancel{2\varepsilon\cos u} - \varepsilon^2$$

$$= \sin^2 u - \varepsilon^2(1-\cos^2 u) = \sin^2 u\,(1-\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{du} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos u}}$$

$$(3) \Rightarrow t = \frac{\mu}{L}\int_0^u du' \underbrace{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos u'}}_{\frac{d\varphi'}{du'}} \underbrace{a^2(1-\varepsilon\cos u')^2}_{r^2 \text{ wegen } (2)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\mu\, a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{L}\int_0^u du'\,(1-\varepsilon\cos u')$$

$$= \frac{\mu\, a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{L}\,(u-\varepsilon\sin u)$$

Skript Gl. (2.8.28):

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{\mu \alpha} \quad \text{mit } \alpha = \gamma m_p m_s$$
$$= \gamma \mu (m_s + m_p)$$

$$\frac{\mu a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{L} = \frac{\mu a\sqrt{a^2-e^2}}{L} = \frac{\mu ab}{L}$$

$$= \frac{\mu a\sqrt{ap}}{L}$$

$$= \frac{\mu a^{3/2}}{\sqrt{\mu \alpha}}$$

$$= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\gamma (m_s + m_p)}} \underset{m_s \gg m_p}{\cong} \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\gamma m_s}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\gamma (m_s + m_p)}} (u - \varepsilon \sin u)$$

Ein Umlauf $u = 2\pi \Rightarrow t = T$ (Umlaufdauer)

$$\Rightarrow T^2 = \frac{a^3 (2\pi)^2}{\gamma (m_s + m_p)} \underset{m_s \gg m_p}{\cong} \frac{4\pi^2 a^3}{m_s} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_s}$$

für alle Pl. gleich

$\Rightarrow$ Kepler III