ART-Periheldrehung im Sonnensystem

Hendrik van Hees

27. Januar 2023

Wir betrachten die Bewegung eines Planeten im Schwerefeld der Sonne unter Verwendung der Schwarzschildlösung für das Gravitationsfeld der Sonne, um eine der „klassischen Bestätigungen“ der ART herzuleiten, die **Periheldrehung** der Planetenbahnen. Dazu erinnern wir zuerst an das klassische Kepler-Problem.

1 Newtonsches Kepler-Problem

Wir betrachten die Näherung, dass die Sonne als festes Zentrum des Schwerefeldes aufgefasst werden kann, was dadurch gerechtfertigt ist, dass die Masse aller Planeten in unserem Sonnensystem viel kleiner als die Masse der Sonne ist. Dann müssen wir nur die Bewegung des Planeten im Gravitationspotential der Sonne

$$V(r) = -\frac{G m_{\text{P}} m_{\text{S}}}{r} = -\frac{m_{\text{P}} m c^2}{r} \tag{1}$$

betrachten. Dabei haben wir gleich den in der relativistischen Rechnung nützlichen Parameter m vermöge $m = G m_{\text{S}}/c^2 = r_{\text{S}}/2$ eingeführt, wobei $r_{\text{S}} \simeq 3\,\text{km}$ der **Schwarzschild-Radius** der Sonne ist.

Die Bewegungsgleichung erhalten wir aus der Lagrange-Funktion, wobei wir einfachheitshalber diese noch durch m_{P} dividieren

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^2 + \frac{mc^2}{r}. \tag{2}$$

Es ist klar, dass aufgrund der Rotationsinvarianz der Drehimpuls erhalten ist. Bis auf einen Faktor m_{P} also

$$\vec{h} = \vec{x} \times \dot{\vec{x}}. \tag{3}$$

Dies impliziert, dass sich die Bahnkurve in einer Ebene senkrecht zu $\vec{h}$ befindet, und wir können $\vec{h} = h\vec{e}_z$ setzen, und für die Bewegung in der xy-Ebene Polarkoordinaten einführen. Dann wird

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{mc^2}{r}. \tag{4}$$

Da φ eine zyklische Variable ist, ist der dazugehörige kanonische Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} = h \tag{5}$$

erhalten. In der Tat zeigt man leicht, dass $|\vec{h}| = |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = h$ ist.

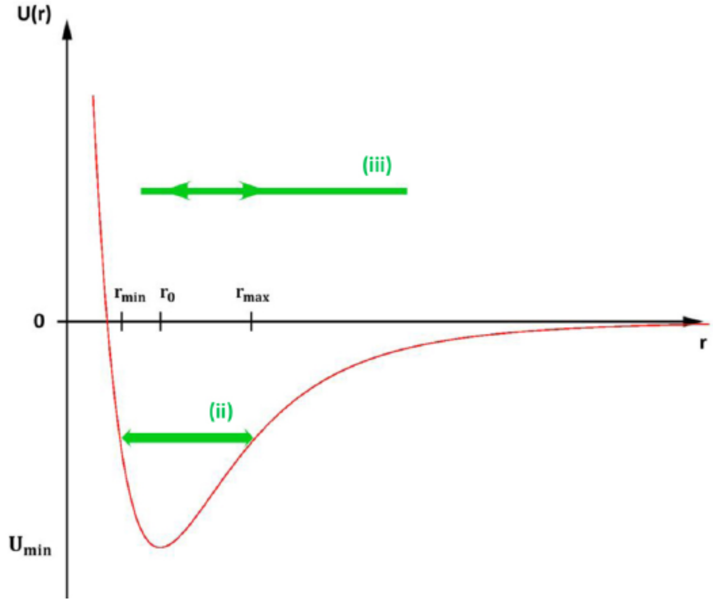
Da außerdem L nicht explizit zeitabhängig ist, ist auch die Hamilton-Funktion

$$H = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{mc^2}{r} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \frac{mc^2}{r} \tag{6}$$

erhalten. Dies entspricht der eindimensionalen Bewegung eines Teilchens entlang von r im effektiven Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{mc^2}{r}. \tag{7}$$

Wie wir anhand der folgenden Sizze sehen, sind die Bahnen für eine Gesamtenergie $H < 0$ notwendig gebunden, denn es ist $H \geq V$, da $H = T + V$ und die kinetische Energie $T = mv^2/2 \geq 0$ sein muss. Entsprechend kann für eine in der folgenden Skizze durch den grünen Pfeil (ii) bezeichnete negative Gesamtenergie r nur Werte im Intervall $[r_{\text{min}}, r_{\text{max}}]$ annehmen, d.h. r bewegt sich immer periodisch in einem endlichen Abstand von der Sonne, d.h. für $H < 0$ liegen gebundene Bahnen vor, während für $H \geq 0$ der Planet ins Unendliche entkommt.



Um die Bahnkurve in der Form $r = r(\varphi)$ zu bestimmen, bemerken wir, dass

$$\dot{r} = \dot{\varphi} r'(\varphi) = \frac{h}{r^2} r'(\varphi) = -hu'(\varphi), \tag{8}$$

wobei wir als neue Variable $u = 1/r$ eingeführt haben. Wir verwenden nun die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für r. Aus (6) folgt

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \quad \dot{p}_r = \ddot{r} = -\dot{\varphi} h u'' = -h^2 u^2 u'' = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{mc^2}{r^2} = h^2 u^3 - mc^2 u^2. \tag{9}$$

Damit erhalten wir die Differentialgleichung für die Bahn

$$u'' + u = \frac{mc^2}{h^2} := A. \tag{10}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$u(\varphi) = A[1 + \eta \cos(\varphi - \varphi_0)], \tag{11}$$

wobei $A\eta$ und φ_0 Integrationskonstanten für die homogene Differentialgleichung entsprechen. Wie in der Astronomie üblich, zählen wir den Winkel φ vom sonnennächsten Punkt der Bahn, dem **Perihel**, aus. Dann ist $\varphi_0 = 0$, denn dann nimmt für $\varphi = 0$ und $\eta > 0$ die Variable $u = 1/r$ ein Maximum und damit r ein Minimum an. Es ist also

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1/A}{1 + \eta \cos\varphi}. \tag{12}$$

Für $0 \leq \eta < 1$ ist dies die Polargleichung einer Ellipse, wobei der Koordinatenursprung in einem Brennpunkt liegt. Das ist das **1. Keplersche Gesetz**: Der Planet bewegt sich auf einer Ellipsenbahn um die Sonne, die sich in einem der Brennpunkte dieser Ellipse befindet.

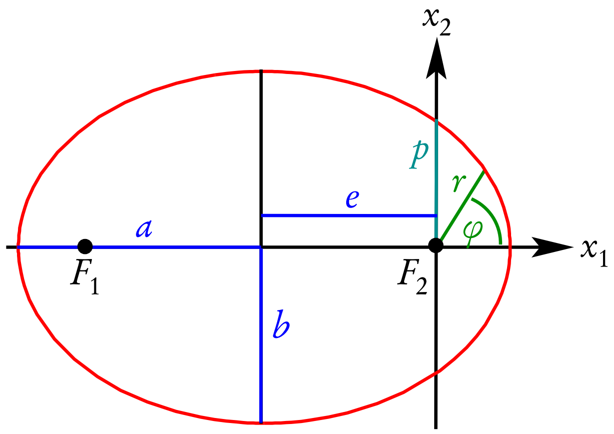
Für die „Energie“ ergibt sich dann gemäß (9)

$$H = -\frac{A^2 h^2}{2}(1 - \eta^2) < 0, \tag{13}$$

d.h. wie oben anhand des effektiven Potentials erörtert, entsprechen Energien $H < 0$ den gebundenen Bahnen. Für $\eta \geq 1$ sind die Bahnen gemäß (12) Parabeln ($\eta = 1$ und $H = 0$) bzw. Hyperbeln ($\eta > 1$ und $H > 0$), wobei sich die Sonne in einem Brennpunkt des jeweiligen Kegelschnittes befindet.

Für die im Folgenden einzig interessante gebundene Bewegung ist $1/A = p = b^2/a$ der Halbparameter, a die große Halbachse, b die kleine Halbachse und η die numerische Exentrizität der Ellipse sind. Wegen $b^2 = a^2(1 - \eta^2)$ ist $p = a(1 - \eta^2)$ und damit

$$A = \frac{1}{a(1 - \eta^2)}. \tag{14}$$



2 Allgemein-relativistisches Keplerproblem

Wir betrachten nun das analoge Problem der Planetenbewegung in der ART. Da die Planetenmasse sehr viel kleiner als die Sonnenmasse ist, können wir dies als die Bewegung einer Probemasse in der durch die Schwarzschild-Lösung gegebenen Raumzeit beschreiben. Die Weltlinie des Planeten ist also durch die Geodätengleichung gegeben, und diese können wir aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung mit der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{15}$$

herleiten. Dabei ist nun $\dot{x}^\mu$ die Ableitung von x^μ nach einem Weltlinienparameter, der automatisch affin ist, denn da L nicht explizit von diesem Weltlinienparameter abhängt, ist die Hamiltonfunktion wieder eine Erhaltungsgröße, und da L quadratisch in den $\dot{x}^\mu$ ist, gilt $H = L$. Wählen wir dann diese Konstante $L = c^2/2$, ist der Weltlinienparameter die **Eigenzeit** des Planeten τ.

Für die **Schwarzschild-Metrik** ist

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)\right]. \tag{16}$$

Dabei ist wieder $m = Gm_{\mathrm{S}}/c^2 \simeq 1{,}5$ km. Da die Schwarzschild-Metrik die statische Lösung für das Gravitationsfeld einer radialsymmetrischen Masseverteilung (außerhalb dieser Masseverteilung) ist[1], sind t und φ zyklische Variablen, d.h.

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2\dot{t} = \text{const}, \tag{17}$$

$$p_\varphi = -h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta. \tag{18}$$

Aus der Überlegung bzgl. der Rotationssymmetrie beim Newtonschen Keplerproblem können wir durch die Wahl der räumlichen Achsen wieder erreichen, dass $\vartheta = \pi/2 = \text{const}$ ist. In der Tat ergibt sich für die Bewgungsgleichung von ϑ

$$\dot{p}_\vartheta = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(r^2\dot{\vartheta}) = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2, \tag{19}$$

und die Lösung $\vartheta = \pi/2 = \text{const}$ ist eine Lösung dieser Bewegungsgleichung. Damit vereinfacht sich aber (18) zu

$$r^2\dot{\varphi} = h = \text{const}. \tag{20}$$

Das weitere Vorgehen ist nun weitgehend analog wie beim Newtonschen Kepler-Problem. Auch hier gehen wir zum Hamilton-Formalismus über:

$$H = \dot{t}p_t + \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi - L = L = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - 2m/r}\frac{p_t^2}{c^2} - (1 - 2m/r)p_r^2 - \frac{h^2}{r^2}\right]. \tag{21}$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen für r lauten

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = -p_r(1 - 2m/r), \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{m}{r^2}\frac{p_t^2}{c^2(1 - 2m/r)^2} + \frac{mp_r^2}{r^2} - \frac{h^2}{r^3}. \tag{22}$$

Mit (17 und (20) sowie $L = H = c^2/2 = \text{const}$ und $\vartheta = \pi/2 = \text{const}$ erhalten wir

$$\frac{p_t^2}{c^2(1 - 2m/r)} = c^2 + (1 - 2m/r)p_r^2 + \frac{h^2}{r^2}. \tag{23}$$

Wir führen wieder $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ ein und verwenden

$$\dot{r} = r'\dot{\varphi} = hr'/r^2 = -hu'. \tag{24}$$

[1] Eine radialsymmetrische Lösung der Einstein-Gleichung im Vakuum, also für $T^{\mu\nu} = 0$ ist übrigens notwendig statisch (Birkhoffsches Theorem).

Damit und (22) wird

$$p_r = -\frac{\dot{r}}{1-2m/r} = \frac{h}{1-2mu}u' \tag{25}$$

und somit, wiederum unter Verwendung von (22,

$$\dot{p}_r = \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{h^2u^2}{1-2mu}\left(u'' + \frac{2mu'^2}{1-2mu}\right) = \frac{mc^2u^2}{1-2mu} + \frac{2mh^2u^2u'^2}{(1-2mu)^2} + \frac{mh^2u^4}{1-2mu} - h^2u^3 \tag{26}$$

bzw.

$$u'' + u = A + 3mu^2 \tag{27}$$

mit $A = mc^2/h^2 = GM/h^2$. Der Vergleich mit (10) zeigt, dass der Unterschied zwischen der Newtonschen und der allgemein-relativistischen Bewegung durch den letzten Term $3mu^2$ auf der rechten Seite gegeben ist, und dies sollte für die Planetenbewegungen in unserem Sonnensystem nur eine kleine Abweichung ergeben. Um das zu zeigen, führen wir den dimensionslosen Parameter

$$\epsilon = 3mA = \frac{3}{2}r_{\mathrm{S}}A \tag{28}$$

ein. Wir schätzen die Größenordnung von ϵ ab, indem wir annehmen, dass die Newtonsche Bewegungsgleichung eine gute Näherung ist und betrachten den einfachen Fall einer Kreisbahn. Dann ist $u'' = 0$ und gemäß (27) unter Vernachlässigung der relativistischen Korrektur folglich $u_{\mathrm{Kreis}} = A = 1/r_{\mathrm{Kreis}}$. Nun ist $m \simeq 1{,}5$ km, und für den sonnennächsten Planeten Merkur ist die große Halbachse der Bahn $a_> \simeq 5{,}8 \cdot 10^7$ km und die Exzentrizität $\eta = 0{,}2$. Der Perihelabstand ist also $r_{\min} = a(1-\eta) = 4{,}64 \cdot 10^7$km und damit $\epsilon \leq 3r_{\mathrm{S}}/(2r_{\min}) = 9{,}7 \cdot 10^{-8}$. Selbst beim Merkur ist also $\epsilon \ll 1$, und wir können erwarten, dass sich die durch (27) beschriebene Bahn nur wenig von der Newtonschen Kepler-Bahn unterscheiden wird, d.h. wir können eine Störungsentwicklung im sehr kleinen Parameter ϵ vornehmen.

Dabei darf man allerdings nicht naiv vorgehen und einfach nur

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{29}$$

ansetzen. Wie wir gleich sehen werden, ergäbe sich dann nämlich eine im Langzeitlimes divergierende Korrektur u_1 durch sog. säkulare Terme. Andererseits ist klar, dass aus energetischen Gründen die Bewegung gebunden bleiben wird. Es ist allerdings zu erwarten, dass aufgrund der kleinen Änderung des effektiven Potentials durch die relativistische Korrektur sich auch die „Kreisfrequenz“ (bzgl. φ als unabhängige Variable) ändern wird. Für die Keplerellipse ist gemäß (11) die „Kreisfrequenz“ $\lambda = 1$. Für die durch den relativistischen Term gestörte Kepler-Bewegung erwarten wir eine kleine Korrketur auch für λ. Diese Überlegung führt auf die sog. **Poincaré-Lindstedtsche Störungstheorie**. Dabei führt man eine neue unabhängige Variable ψ ein und setzt

$$\psi = \lambda\varphi, \quad \lambda = 1 + \lambda_1\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{30}$$

Damit wird die Bewegungsgleichung (27) wegen $u'(\varphi) = \psi'\mathrm{d}_\psi u = \lambda \mathrm{d}_\psi u$ zu

$$\lambda^2\mathrm{d}_\psi^2 u + u = A + \frac{\epsilon}{A}u^2. \tag{31}$$

Setzen wir nun die Entwicklungen (29) und (30) nach Potenzen von ϵ ein, wobei wir nur Beiträge bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ berücksichtigen, ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\mathrm{d}_\psi^2 u_0 + u_0 = A, \tag{32}$$

$$\mathrm{d}_\psi^2 u_1 + u_1 = \frac{1}{A}u_0^2 - 2\lambda_1\mathrm{d}_\psi^2 u_0. \tag{33}$$

Für u_0 erhalten wir, wie zu erwarten, die ungestörte Newtonsche Lösung

$$u_0(\psi) = A(1+\eta)\cos\psi, \tag{34}$$

und in der Tat muss ja unter völliger Vernachlässigung der relativistischen Korrektur, also für $\epsilon = 0$ wieder die Kepler-Ellipse herauskommen. Da dann auch $\lambda = 1$ ist, ist das auch tatsächlich der Fall. Setzen wir also (34) auf der rechten Seite von (33) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_\psi^2 u_1 + u_1 &= A(1+\eta\cos\psi)^2 + 2\lambda_1 A\eta\cos\psi = A + 2A(\lambda_1+1)\eta\cos\psi + A^2\eta^2\cos^2\psi \\ &= A\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right) + 2A\eta(1+\lambda_1)\cos\psi + \frac{A\eta^2}{2}\cos(2\psi). \end{aligned} \tag{35}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $\cos^2\psi = [1+\cos(2\psi)]/2$ verwendet. Wir lösen diese Gleichung für die Anfangsbedingung $u_1(0) = \mathrm{d}_\psi u(0) = 0$ und erhalten

$$u_1(\psi) = A\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right) - \frac{A}{6}\eta^2\cos(2\psi) - A\left(1+\frac{2\eta^2}{3}\right)\cos\psi + A\eta(1+\lambda_1)\psi\sin\psi. \tag{36}$$

Nun muss aber $\epsilon u_1 \ll u_0$ für alle $\psi \in \mathbb{R}$ sein. Außerdem darf nicht $u_1 \to \infty$ werden, weil dann $r = 1/u \to 0$ würde, d.h. der Planet würde in die Sonne stürzen, was aber aufgrund der Energieerhaltung unmöglich ist. Das geschieht aber für $\psi \to \infty$, wenn nicht der letzte „säkulare Term“ verschwindet. Das erreichen wir, indem wir $\lambda_1 = -1$ setzen. Damit ergibt sich für die Lösung der Gleichung unter Berücksichtigung, dass in dieser Näherung $\psi = \lambda\varphi = (1-\epsilon)\varphi$ ist,

$$u = A(1+\eta)\cos\psi + \mathcal{O}(\epsilon) = A(1+\eta)\cos[(1-\epsilon)\varphi] + \mathcal{O}(\epsilon). \tag{37}$$

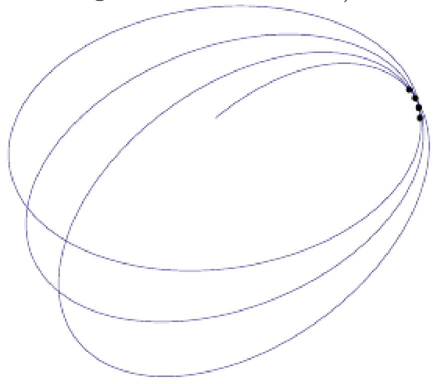
Der Term $\mathcal{O}(\epsilon)$ kann vernachlässigt werden. Wir erhalten allerdings als Bahnkurve keine Ellipse mehr, da sich die Bahn offenbar nicht bei $\varphi = 2\pi$ schließt, d.h. das nach $\varphi = 0$ nächste Perihel wird erst beim Winkel φ_{per} erreicht, für den

$$(1-\epsilon)\varphi_{\text{per}} = 2\pi \quad \varphi_{\text{per}} = \frac{2\pi}{1-\epsilon} = 2\pi(1+\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{38}$$

d.h. der Winkel muss um

$$\Delta\varphi_{\text{per}} = \varphi_{\text{per}} - 2\pi = 2\pi\epsilon = \frac{6\pi m}{a(1-\eta^2)} \tag{39}$$

grroßer sein als 2π, damit das nächste Perihel erreicht wird. Dabei haben wir (14) verwendet, d.h. das Perihel dreht sich bei jedem Umlauf um den kleinen Winkel (39) in Richtung der Planetenbewegung, und die Ellipsenbahn der Newtonschen Näherung wird zu einer Rosettenbahn (hier übertrieben dargestellt, wie wir gleich sehen werden)



Für den Merkur ergibt sich eine Periheldrehung um $(43{,}03 \pm 0.03)''$ pro Jahrhundert[2], was gut mit dem beobachteten Wert von $(42.96 \pm 0{,}94)''$ übereinstimmt.

Dabei muss man beachten, dass es natürlich noch sehr viele viel größere Effekte für die Periheldrehung gibt, z.B. dass das Schwerefeld der Sonne nicht exakt radialsymmetrisch ist sowie die Störung der Bahn durch andere Himmelskörper. Diese Störungen konnte man aber schon im 19. Jh. sehr genau bestimmen, und die verbliebene Diskrepanz von etwa $43''$ wurde bereits durch Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) bestimmt. Als Ursache wurde ein noch unentdeckter Planet, den man Vulkan nannte, vermutet. Nachdem ein solcher Planet aber nie gefunden werden konnte, war die Erklärung dieser Periheldrehung als Effekt der Allgemeinen Relativitätstheorie eine der klassischen Bestätigungen dieser Theorie. Der eigentliche Durchbruch für die ART war dann die Beobachtung und quantitative Bestätigung der von Einstein vorhergesagten Lichtablenkung an der Sonne bei der Sonnenfinsternis von 1919.

Wir bemerken noch, dass gemäß dem Bertrandschen Theorem[3] in der Newtonschen Mechanik die Bewegungen im $1/r$-Potential und im r^2-Potential (symmetrischer harmonischer Oszillator) die einzigen Bewegungen sind, für die **alle gebundenen Bahnen** geschlossen sind. Dies liegt jeweils an sog. dynamischen Symmetrien, die nur für diese Potentiale gelten, die zusätzlich zu den allgemein gültigen Raum-Zeit-Symmetrien vorliegen.

[2] Man beachte, dass $1''$, also 1 Bogensekunde, der 3600-te Teil eines Grades sind!

[3] Joseph Louis Francois Bertrand (1822-1900)